DESCRIPTIVE

GEOMETRIE

MIT EINSCHLUSS

DER PRINCIPIEN

DER

ISOMETRISCHEN

PROJECTIONSLEHRE

FÜR

SCHULEN UND ZUM SELBSTUNTERRICHTE

BIBLIOTHEK
MUSEUM

BEARBEITET VON

C. KUHN,

Professor der Analysis und angewandten Mathematik an der königlichen polytechnischen Schule zu Augsburg.

[1845]

AUGSBURG.

VERLAG VON V. ZANNA & COMP.

Wbg 163/28

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

ГЕОМЕТРІЯ

ДЕСКРИПТИВНАЯ

Vorrede.

Das vorliegende Lehrbuch soll dem Selbslernenden den Weg zeigen, welchen er einzuschlagen hat, um sich die nothwendigsten Kenntnisse der descriptiven Geometrie eigen machen zu können, und den verehrlichen Lehrern dieses Gegenstandes zum Leitfaden bei ihrem Unterrichte an technischen Lehranstalten dienen. — Was nun die Art und Weise der Abfassung und Anwendung der in diesem Buche abgehandelten Gegenstände betrifft, so hatte ich besonders den Anfänger im Auge, und begann daher mit demjenigen Theile der Geometrie, auf welchen die descriptive Geometrie basirt ist, und welcher in den Principien der Projektionslehre seine grösste Anwendung findet. Dieser Theil in Verbindung mit der Lehre von den Polyedern ist für das erste Buch der descriptiven Geometrie gleichsam das, was das die Planimetrie für die Construktionen in der Ebene ist. Ausser diesem unter dem Namen „Geometrie im Raume“ vorkommenden Kapitel ist wohl für den Anfänger das erste Buch, welches die geraden Linien, Ebenen und Polyeder behandelt, das wichtigste, weil durch dieses zuerst die Anschauung geübt werden muss, um alles Folgende verstehen zu können. — Da nun ein sehr behutsamer Weg nothwendig ist, um den Lernenden in dem vorliegenden Gegenstand einzuführen, so hielt ich mich beim ersten Buche am längsten auf, versuchte es, jede darin vorkommende Aufgabe zuerst allgemein ohne Berücksichtigung eines besonderen Falles zu lösen, und wendete dann nach gegebener allgemeiner Lösung die Aufgabe auf einzelne Beispiele an. Dabei liess ich aber auch nicht aus dem Auge, zu zeigen, dass die descriptive Geometrie die Construktionen desjenigen liefert, was die analytische Geometrie in Gleichungen vorstellt. —

In diesem ersten Buche erwähnte ich eine Projektionsmethode, die beim Aufnehmen von Maschinen und Werkzeugen viel Bequemlichkeit darbietet, nämlich die isometrische Projektionslehre. Mehr als die Principien derselben und einige Beispiele über die entwickelten Regeln anzugeben, erlaubten mir die Gränzen dieses Buches nicht, weshalb ich auch die isometrischen Projektionen krummer Linien und Flächen weglassen musste. Uebrigens wird man sich bei den isometrischen Projektionen von Curven nicht schwer thun, weil die Regeln, welche für die isometrische Projektion von Polygonen so genau als möglich gegeben wurden. Im zweiten Buche musste ich mich so kurz als möglich bei einzelnen Kapiteln aufhalten, weil mir die Gränzen im Umfange des Buches festgesetzt waren. So konnte ich über Erzeugung

der Flächen nur das Wichtigste sagen und Manches, was zur Vollständigkeit des Lehrbuches nothwendig gewesen wäre, konnte nur kurz berührt, oder musste ganz weggelassen werden. Deshalb behalte ich mir vor, in einem eigenen isolirten Anhange das zu ergänzen, mit welchem ich dieses Buch noch zu versehen beabsichtigte. Derselbe wird ausser einer ausführlichen Abhandlung über die windschiefen und nicht abwickelbaren Flächen überhaupt, noch die Theorie und Construktion der Curven abhandeln, welche bei Verzahnungen ihre Anwendnug finden, manche andere Uebungsaufgaben enthalten, und die Principien der Schattenkonstruktion sowie die der Linear-Perspective liefern. —

Uebrigens ist der von mir im Auge gehabte Zweck, nämlich den Lernenden in den Gegenstand gehörig einzuführen, erfüllt, und sollten desfalls von den verehrlichen Lehrern der descriptiven Geometrie noch Wünsche an mich gemacht werden, so werde ich dieselben mit Dank annehmen, und berücksichtigen so weit es mir möglich ist. —

Zum Schlusse bitte ich einiger sich beim Drucken des Textes und Graviren der Zeichnungen eingeschlichen und übersehenen Fehler halber um Entschuldigung, und erlaube mir die verehrlichen Leser auf ein in Fig. 121. vorgekommenes Versehen aufmerksam zu machen, worin die in Beispiel 2. des §. 173 beschriebene Construktion zur Aufsuchung der Durchgangspunkte der Kanten des gegebenen Prisma mit der Schnittebene nicht berücksichtiget ist, und bloss die andere angezeigte Construktion, welche aber auch die Aufgabe vollständig löste, gezeichnet wurde. —

Augsburg im Juli 1844.

K.

Erstes Buch.

Erste Abtheilung.

Einleitung.

Geometrie im Raume.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Erste Abtheilung.

Einleitung.

§. 1.

Die descriptive Geometrie hat die Zeichnung körperlicher Formen und Grössen zum Gegenstande, so dass aus der Darstellung nicht allein auf die wahre Gestalt des Körpers, sondern auch auf seine Grösse, wenn derselbe begränzt ist, geschlossen werden kann.

§ 2.

Um ihren Zweck zu rereichen, benützt dieselbe die Geometrie im Raume, zeigt zuerst, wie man einen im Raume beliebig angegebenen Punkt bestimmen kann, betrachtet sodann die Erzeugung der übrigen geometrischen Grössen, zeigt mit Benützung der Geometrie, wie man aus dieser Erzeugung Mittel zur Darstellung finden kann.

§. 3.

Bekanntlich ist jede Gerade (nämlich gerade Linie) der Lage nach durch zwei sich auf derselben befindende Punkte bestimmt. Ist daher das Mittel angegeben, einen Punkt darzustellen, so wird es nicht schwierig sein, auch die Lage einer Geraden genau anzugeben. Eben so werden wir zeigen, wie eine Ebene durch Punkte oder durch Gerade, die sich auf der Ebene befinden sollen, der Lage nach bestimmt ist; daher wird man aus der Darstellung von Geraden in Verbindung mit den Eigenschaften, welche aus der Erzeugung einer Ebene hervorgehen, die Lage einer, also auch beliebig gegeneinander gestellter Ebenen im Raume durch Zeichnung bestimmen können. — Eben so leicht wird auch die Darstellung jeder beliebigen Fläche sein, wenn man auf ihre Erzeugung und auf die Darstellung der bei dieser Erzeugung benützten geometrischen Grössen Rücksicht nimmt. — Es ist daher auch einleuchtend, wie man körperliche Formen zu zeichnen im Stande sein wird, und aus der Zeichnung die wahre Gestalt des Körpers ersehen kann. —

Wir gehen daher vor Allem auf die Darstellung von Punkten, Linien und Ebenen über, erläutern die unumgänglich nothwendigen Sätze der räumlichen Geometrie, und begründen vermittelst derselben die Darstellung der genannten geometrischen Grössen.

Erstes Kapitel.

Von der Lage gerader Linien und Ebenen im Raume

§. 4.

Erklärung. Ebene ist eine Fläche, auf welcher man eine Gerade in einer beliebigen Richtung sich denken kann, so dass diese überall in die Fläche fällt, wenn man sich beide beliebig weit ausgedehnt denkt.

Zusatz. Eine Gerade kann daher nicht, theils in einer Ebene, theils ausserhalb derselben sich befinden, und wird mithin ganz und gar in der Ebene liegen, wenn nur zwei in ihr sich befindende Punkte in dieser Ebene sind.

§. 5.

Bewegt sich eine Gerade stets parallel zu ihrer anfänglichen Richtung und eine andere Gerade treffend fort, so wird der Raum, welchen diese sich bewegende Gerade durchläuft, eine ebene Fläche sein, oder Ebene. — Es wird aber auch eine Ebene dadurch erzeugt, indem sich eine Gerade, die stets durch einen und denselben Punkt geht, an einer andern Geraden fortbewegt. Die sich bewegende Gerade wird Erzeugende oder Generatrix, die Gerade aber, welche die Erzeugende bei ihrer Bewegung stets trifft: Directrix oder Leitlinie genannt. —

§. 6.

Eine Ebene wird von einer Geraden nur in einem Punkte getroffen, weil die Gränze einer Linie ein Punkt ist. Dieser Punkt, in welchem eine Ebene eine Gerade trifft, wird im Allgemeinen Durchgangspunkt der Geraden genannt; steht die Gerade senkrecht auf der Ebene, so nennt man diesen Durchgangspunkt den Fusspunkt der Senkrechten.

§. 7.

Aus §. 5 kann man sogleich eine Erklärung ableiten; für eine auf einer Ebene senkrecht stehende Linie. Bleibt nämlich eine Gerade stets senkrecht auf der durch ihren Fusspunkt gehenden Erzeugenden der Ebene, so wird dieselbe auf dem geometrischen Orte, den diese Linie beschreibt, auch immer senkrecht sein, oder was dasselbe ist:

Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn dieselbe mit allen in der Ebene liegenden Geraden, die durch ihren Fusspunkt gehen, rechte Winkel bildet.

Anmerk. Sobald wir gezeigt haben, wodurch die Lage einer Ebene bestimmt ist, soll nachgewiesen werden, dass eine Gerade nur mit zweien durch ihren Durchgangspunkt gehenden und in der Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bilden muss, um auch auf der Ebene selbst senkrecht zu sein.

§. 8.

Es wurde in den Paragraphen 4 und 5 gezeigt, welche Eigenschaften eine Fläche haben muss, damit dieselbe eine Ebene ist, und wie eine solche Ebene erzeugt werden kann. Nun sollen die Bedingungen aufgesucht werden, welche die Lage einer Ebene im Raume bestimmen.

Nimmt man eine Gerade im Raume beliebig an, und denkt durch diese eine Ebene gelegt, so wird man diese Ebene noch um die Gerade drehen können, ohne dass sie dabei letztere verlässt. Dreht man die Ebene nun so lange um die genannte Gerade, bis sie einen ausserhalb der letzteren angenommenen Punkt enthält, so wird man die Lage der Ebene jetzt nicht mehr verändern können, ohne dass dieselbe entweder den gegebenen Punkt oder die Gerade verlässt. Soll daher die Ebene die Gerade sowohl, als auch den Punkt enthalten; so darf dieselbe von nun an ihre Lage nicht mehr verändern. Hieraus folgt aber sogleich der Satz:

Die Lage einer Ebene ist durch eine Gerade und einen ausserhalb dieser letzteren angenommenen Punkt bestimmt.

§. 9.

Es seien nun drei nicht in einer Geraden sich befindende Punkte im Raume angegeben; so kann man durch zwei derselben sich eine Gerade gelegt denken, welche der Lage nach vollkommen bestimmt sein wird. Durch diese Gerade und den dritten Punkt kann man sich aber nach vorigem §. eine Ebene gelegt denken, die der Lage nach völlig bestimmt ist. Diese Ebene enthält aber zugleich die beiden ersten Punkte, weil letztere auf einer Geraden sich befinden, die in der Ebene liegt; mithin können wir sagen:

Durch drei (nicht in einer Geraden) liegende Punkte kann man eine Ebene legen, und die Lage dieser Ebene ist durch diese drei Punkte völlig bestimmt.

§. 10.

Es seien zwei sich schneidende Gerade im Raume gegeben; man soll untersuchen, ob durch diese eine Ebene gelegt werden kann, welche der Lage nach völlig bestimmt ist. — Denkt man sich daher durch die erste der beiden Geraden eine Ebene gelegt, so kann man dieser offenbar noch eine solche Lage geben, dass sie einen in der zweiten Geraden enthaltenen Punkt enthält. Ist diess aber geschehen, so ist die Lage der Ebene (nach §. 8.) eine bestimmte, und es enthält zugleich die Ebene (nach §. 4.) die zweite Gerade, weil von letzterer sich zwei Punkte in jener befinden, mithin kann man

durch zwei sich schneidende Gerade eine Ebene legen, deren Lage völlig bestimmt ist.

§. 11.

Endlich soll untersucht werden, ob durch zwei unter sich parallele Gerade die Lage einer Ebene bestimmt ist.

Geht man hierbei von der Euclid'schen Definition aus, nämlich: „zwei Gerade sind parallel, wenn dieselben beliebig weit verlängert sich nicht schneiden, und in einer Ebene liegen"; so kann man sich durch zwei parallele Gerade eine Ebene denken. Da aber diese Ebene die erste Gerade und jeden beliebigen auf der zweiten Geraden angenommenen Punkt enthält, so ist auch ihre Lage bestimmt (nach §. 8.). —

Benützt man die Definition: zwei Gerade sind parallel, wenn sie gegen eine dritte auf derselben Seite gleiche Richtung gegen einander behalten; so kann man sich die beiden Parallelen durch eine dritte Gerade geschnitten denken. (Fig. 1.) Die beiden parallelen Geraden seien nun P_1 und P_2, die dritte Gerade sei durch L bezeichnet. Durch L und P_1 kann man sich (nach §. 10.) eine Ebene gelegt denken, und diese muss nun auch P_2 enthalten; denn ein Punkt der P_2 ist schon in der Ebene, nämlich der Durchschnittspunkt von L und P_2, und und würde nicht noch ein zweiter beliebig in P_2 angenommener in die Ebene fallen, so denke man sich in dieser Ebene durch den Punkt, in welchem P_2 von L getroffen wird; eine Gerade $'P$ so gezogen, dass der Winkel, welchen $'P$ mit L bildet, gleich dem auf derselben Seite liegenden Winkel wird, den P_1 mit L bildet. Es wäre nun nach der Definition $'P \neq P_1$, was aber nicht sein kann, weil man nach einem Satze der ebenen Geometrie: durch einen und denselben Punkt nur eine Gerade mit einer andern parallel ziehen kann; mithin muss $'P$ mit P_2 zusammenfallen. Da aber $'P$ in der durch

L und P_1 gelegten Ebene sich befindet, so wird diess auch von P_2 der Fall sein. Es folgt also auch aus dieser Definition, dass man durch zwei parallele Gerade eine Ebene legen kann, welche dann der Lage nach völlig bestimmt ist.

Legt man endlich die dritte in den Lehrbüchern der ebenen Geometrie herrschende Definition zu Grunde: zwei Gerade sind parallel, wenn sie überall gleiche senkrechte Abstände von einander haben; so kann man sich zum Zwecke der vorliegenden Untersuchung eine Gerade denken, die auf beiden senkrecht steht, durch diese und P_1 eine Ebene legen, welche dann auch P_2 enthalten muss. (Fig. 1.) Wäre dieses nicht der Fall, so könnte man sich durch den Durchschnittspunkt von P_2 und L in der gedachten Ebene eine Gerade 'P gezogen denken, welche überall die Entfernung L von der Geraden P_1 hat, und die mithin mit der P_1 parallel sein müsste. Diese Gerade 'P muss aber mit P_2 zusammenfallen, weil sonst durch einen Punkt zwei Parallele mit einer Geraden gezogen werden könnten.

Nimmt man daher irgend eine dieser drei herrschenden Definitionen für parallele Gerade; so lässt sich immer leicht zeigen:

dass durch zwei unter sich parallele Gerade nur eine Ebene gelegt werden kann, und diese der Lage nach (§. 8.) völlig bestimmt ist.

Anmerk. 1. Da ich beim Studium dieses Lehrbuches der descript. Geometrie die Planimetrie voraussetzen muss; so hielt ich es für nothwendig den in diesem §. abgehandelten Satz nach den am meisten im Gebrauche stehenden Definitionen zu behandeln. —

Anmerk. 2. Sind zwei Gerade nicht parallel, und schneiden sich auch nicht, so weit man sie auch verlängern mag; so kann man keine Ebene finden, in welcher beide zugleich enthalten sind. —

§. 12. Lage einer Geraden gegen eine Ebene

Nachdem nun die Bedingungen, unter welchen die Lage einer Ebene bestimmt ist, erläutert sind, so wollen wir die Lage einer Geraden gegen eine Ebene untersuchen.

Denkt man sich zu diesem Ende vor Allem eine Gerade, die mit zweien in einer gegebenen Ebene liegenden und durch ihren Durchgangspunkt gehenden Geraden rechte Winkel bildet; so kann nachgewiesen werden, dass diese Gerade mit jeder durch ihren Durchgangspunkt gehendeu und in der Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bilden muss. (Fig. 2.) Es sei zu diesem Ende durch MN eine Ebene bezeichnet, gegen welche eine Gerade ST so liegen soll, dass $< STB =$ R, und $< STA =$ R, und wobei T der Durchgangspunkt der Geraden ST ist, AT und BT in der Ebene angenommene Gerade sind. Verlängert man nun jede der beiden Geraden AT und BT, und macht $TF = AT$, $DT = BT$, zieht ferner durch T in der Ebene MN die beliebige Gerade CTE, verbindet ferner F mit D, B mit A, den beliebig in ST angenommenen Punkt S mit F, D, A und B durch Gerade, so ist leicht zu ersehen, dass

1. $\triangle DTF \cong \triangle ATB$, mithin auch $DF = AB$ und $< EDF = < TBC$

sein muss. Ferner ist ebenso leicht einzusehen, dass

2. $\triangle SDT \cong \triangle STB$, also $SD = SB$
3. $\triangle SFT \cong \triangle STA$, also $SF = SA$
4. $\triangle EDT \cong \triangle TBC$, also $ED = BC$, $ET = TC$, $FE = AC$
5. $\triangle DFS \cong \triangle ASB$ (aus 1, 2 und 3), also $< SDE = < SAC$
6. $\triangle SFE \cong \triangle SAC$ (nach 3, 4, 5), also $SE = SC$, endlich
7. $\triangle SET \cong \triangle SCT$ (nach 4 und 6), mithin auch $< STE = < STC = R$

sein muss. Da also ST auf jeder beliebigen durch ihren Durchgangspunkt gehenden und in der Ebene MN liegenden Geraden senkrecht steht, so wird dieselbe nach §. 7. auf Ebene MN senkrecht sein, und daher hat man den Satz:

Steht eine Gerade nur auf zweien durch ihren Durchgangspunkt mit einer Ebene gehenden, und in dieser liegenden Geraden senkrecht, so wird dieselbe auch auf der Ebene senkrecht sein.

§. 13. Durchschnitt zweier Ebenen

Bei den folgenden Untersuchungen und Sätzen wird es öfters nothwendig sein noch eine Ebene, die gegen die gegebene beliebig geneigt ist, zu Hülfe zu nehmen; daher wollen wir sehen, welches der Durchschnitt zweier Ebenen ist. Vor Allem muss der Durchschnitt zweier Ebenen, d. h. die geometrische Grösse, nach welcher sich zwei Ebenen schneiden: eine Linie sein, weil an dem Orte, an welchem sich beide Ebenen schneiden, jede derselben begränzt wird, also ein Raum von nur einer Ausdehnung die gemeinschaftliche Gränze derselben sein kann. Diese Linie muss aber noch die Eigenschaft haben, dass sie in jeder beliebigen Richtung gedacht, in der Ebene ganz und gar liegen muss; denn man kann sich die eine der Ebenen fest, die andere beweglich denken, so

dass auch der Durchschnitt nach und nach auf der festen Ebene sich fortbewegt, und dabei in der beweglichen Ebene bleibt. Da man nun diese Eigenschaft, dass nämlich diese Linie in jeder beliebigen Richtung gedacht in eine Ebene fällt, nur an einer Geraden findet; so ist der Durchschnitt zweier Ebenen eine Gerade.

§. 14.

Gehen wir nun wieder auf die Lage einer Geraden gegen eine Ebene über, und bleiben noch ein wenig bei der Senkrechten stehen. Denkt man sich von einem Punkte ausserhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte gezogen, so wird jede andere von demselben Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte mit jener zusammenfallen müssen. Legt man nämlich durch diese zwei Gerade eine Ebene, und bestimmt ihren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene, so müsste auch jede dieser Geraden senkrecht auf dem Durchschnitte der gegebenen und der durch beide Linien gedachten Ebene sein, was aber nicht sein kann; mithin kann man sagen:

Von einem ausserhalb einer Ebene angenommenen Punkte kann man auf diese nur eine einzige Senkrechte ziehen.

§. 15.

Eben so kann man sich leicht überzeugen, dass man von einem in einer Ebene angenommenen Punkte aus auf diese auch nur eine Senkrechte ziehen kann. Würde eine zweite möglich sein, so könnte man sich durch beide eine Ebene gelegt denken, welche dann die gegebene schneiden muss, und zwar nach §. 13. in einer Geraden. Auf letzterer muss jede von dem angenommenen Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte auch senkrecht sein; also auch jene zwei Geraden. Da aber dieses nicht der Fall sein kann, weil sie in einer Ebene, nämlich in der Hülfsebene liegen, so muss jede zweite von dem angenommenen Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte mit der ersten zusammenfallen, d. h.

Von einem auf einer Ebene angenommenen Punkte aus kann man auf diese nur eine Senkrechte ziehen.

(Fig. 3.) Derselbe Beweis soll mit Benützung einer Figur wiederholt werden. Wäre nämlich AB senkrecht auf Ebene MN, und es würde von A aus noch eine zweite Gerade AC möglich sein, die senkrecht auf Ebene MN steht; so kann man durch AB und AC (§. 10.) eine Ebene legen, und diese wird Ebene MN (§. 13.) in einer Geraden schneiden, die AD sein soll. Es müsste nun nach §. 7., AB sowohl als AC auf AD senkrecht stehen, was aber nicht sein kann, weil beide und AD in derselben Ebene liegen; mithin muss nothwendig jede zweite Gerade, die man von A aus auf Ebene MN senkrecht ziehen könnte mit AB zusammenfallen, oder AB ist die einzige Senkrechte. —

§. 16.

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine Senkrechte, und mehrere andere Gerade, so wird jede der letzteren länger, als jene Senkrechte sein. Denn denkt man sich durch diese Senkrechte und eine beliebige der Geraden eine Ebene gelegt, so wird diese die gegebene Ebene in einer Geraden schneiden. Letztere bildet mit jenen beiden Geraden (durch welche die Ebene gelegt wurde) ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypothenuse die von dem beliebigen Punkte auf die gegebene Ebene gezogene Gerade ist, und die mithin länger sein muss, als eine der Katheten, also auch länger, als die vom angenommenen Punkte auf die gegebene Ebene gezogene Senkrechte.

§. 17.

Hieraus folgt nun sogleich der Satz:

Die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Ebene ist die von diesem Punkte auf die Ebene gezogene Senkrechte, und zwar der Theil von letzterer, welcher zwischen dem gegebenen und ihrem Fusspunkte liegt. —

§. 18.

(Fig. 4.) Nimmt man nun wieder eine Ebene (MN) an, und zieht von einem ausserhalb derselben angenommenen Punkte A auf dieselbe die Senkrechte AB, ferner mehrere andere Gerade AC, AD, AE so, dass ihre Durchgangspunkte C, D, E von dem Fusse B der Senkrechten AB gleichweit entfernt sind, also BC = BD = BE, so werden die hierdurch entstandenen rechtwinkligen Dreiecke ABC, ABD und ABE kongruent, folglich auch die schrägen auf die Ebene gezogenen Geraden AC, AD, AE gleich lang sein. — Ist aber vom angenommenen Punkte A aus auf die Ebene noch eine Gerade AF gezogen, deren Durchgangspunkt F weiter von der Senkrechten entfernt ist, als die Durchgangspunkte der vorigen Geraden, so wird sie auch länger, als jede der vorigen Geraden sein. Denn zieht man BF, trägt auf diese die Gerade BG = BC auf, und zieht AG, so wird nach dem ersten Theile dieses §., AG = AC sein. Nun liegen aber AB, AG und AF in einer Ebene, in wel-

cher AB senkrecht auf BF ist, mithin muss nach einem Satze der ebenen Geometrie AF > AG, also auch grösser, als AC, und mithin auch grösser, als jede der Geraden AD und AE sein, weil diese einzeln gleich AC sind. Aus diesem Ganzen folgt nun:

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine Senkrechte und mehrere andere Gerade; so werden diejenigen, deren Durchgangspunkte von der Senkrechten gleich weit entfernt sind, unter sich gleich lang sein. Von denjenigen aber, deren Durchgangspunkte ungleich weit von der Senkrechten entfernt sind, wird jene die längere sein, deren Durchgangspunkt auch weiter von der Senkrechten entfernt ist.

§. 19.

(Fig. 5.) Nun sollen umgekehrt die Geraden AC, AD, AE etc. etc., welche von A aus bis zur Ebene MN gezogen werden, gleich lang sein. Zieht man nun von A aus auf Ebene MN die Senkrechte AB, und verbindet die Punkte C, D, E etc. etc. mit B durch Gerade, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke ABC, ABD, ABE, welche kongruent sein müssen (weil zwei Seiten des einen immer zweien Seiten des andern einzeln genommen gleich sind). Es ist also $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$ etc. etc., und ferner $BC = BD = BE$ u. s. w., oder C, D, E etc. etc., liegen in einem Kreisumfange, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt der Senkrechten ist. Hieraus folgt also der Satz:

Zieht man von einem Punkte auf eine Ebene eine beliebige Anzahl gleich langer Geraden, so werden

1. diese Geraden mit denjenigen Geraden, die man von ihren Durchgangspunkten nach dem Fusse der Senkrechten zieht, gleiche Winkel bilden;
2. die Durchgangspunkte dieser Geraden in einem Kreisumfange liegen, dessen Mittelpunkt der Fuss der von ihrem gemeinschaftlichen Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechte ist.

§. 20.

(Fig. 5.) Letzteres könnte man nun sogleich anwenden, um von einem ausserhalb einer Ebene angenommenen Punkte aus auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

Man würde nämlich zu diesem Ende vom Punkte A aus eine Linie AC bis zur Ebene ziehen, und diese sich so bewegt denken, dass sie stets durch A geht und ihre ursprüngliche Länge AC behält; so trifft sie die Ebene in andern Punkten, von welchen wir nur noch zwei, nämlich D und E bezeichnen wollen. Sucht man nun den Mittelpunkt B des Kreisumfanges, der durch C, D, E geht, so wird die Gerade, die von A nach B gezogen wird, senkrecht auf der Ebene sein. Denn zieht man in diesem Kreise einen Durchmesser, und denkt sich von dessen Endpunkten aus nach D gerade Linien gezogen, so entstehen zwei Dreiecke, die kongruent sein müssen, und mithin rechwinklig sind. —

§. 21.

(Fig. 5.) Gehen wir nochmal auf das Resultat des §. 19. zurück, so ersehen wir aus dem 1. Theile des darin bewiesenen Lehrsatzes, dass wenn eine Gerade, die durch einen fixen Punkt geht, stets eine gegebene Ebene trifft, dieselbe Länge beibehält: der Winkel, den diese Gerade mit derjenigen bildet, welche von ihrem Durchgangspunkte nach dem Fusse der von ihrem fixen Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten gezogen wird, sich gleich bleibt, wenn man sich die Gerade in einer beliebigen der erwähnten Lagen denkt. Dieser Winkel ist aber auch ausserdem der kleinste unter allen, die diese Gerade mit allen andern Geraden bildet, welche in der Ebene liegen, und durch ihren Durchgangspunkt gehen. Denn zieht man z. B. durch C eine beliebige Gerade in der Ebene MN, macht $CH = CB$, und denkt sich AH gezogen, so wird, weil $BH = CH$; $CA = CA$, $AB < AH$ ist, auch $\angle ACB < \angle AHC$ sein.

Ist also eine Gerade beliebig gegen eine Ebene geneigt, und man zieht von einem auf derselben angenommenen Punkte aus eine Senkrechte auf die Ebene, verbindet den Fuss dieser Senkrechten mit dem Durchgangspunkte der gegebenen Geraden durch eine Gerade, so bildet diese Gerade mit der gegebenen einen Winkel, der unveränderlich bleibt und der kleinste unter allen ist, welche die Gerade mit anderen bildet, die man sich durch ihren Durchgangspunkt in der Ebene gezogen denken kann.

Anmerk. Dieser Winkel wird der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene genannt. Wie er erhalten wird, ist leicht aus dem vorigen Satze zu ersehen. —

§. 22.

(Fig. 6.) Denkt man sich von irgend einem Punkte der Geraden AB auf diese mehrere Senkrechte gezogen, und legt durch zwei derselben eine Ebene MN,

so werden alle durch den Punkt B gehenden und in der Ebene MN liegenden Geraden auf AB senkrecht stehen nach §. 12. Würde nun unter allen auf AB senkrecht stehenden und durch B gehenden Geraden eine sein, die nicht in der Ebene MN liegt, z. B. BD, so könnte man durch diese und eine in Ebene MN liegende Gerade BC (nach §. 10.) eine Ebene legen, welche dann (nach §. 12.) auf BA senkrecht sein müsste. Wäre diese Ebene PQ, und man denkt sich durch AB und BC eine Ebene gelegt, welche die Ebene PQ in BD schneidet, so müsste $\angle$ ABD ein Rechter, also so gross, als $\angle$ ABC sein, was nach einem Satze der ebenen Geometrie nicht sein kann, mithin müssen alle durch B gehenden und auf AB senkrechten Geraden in der nämlichen Ebene liegen, woraus also folgt:

Alle auf einer Geraden durch denselben Punkt senkrecht gezogenen Geraden liegen in einer Ebene.

§. 23.

Aus dem im vorigen Paragraphe erwähnten Satze folgt:

1. Wenn eine Gerade auf einer andern Geraden senkrecht ist, und sich so um diese bewegt, dass sie stets durch denselben Punkt geht, und senkrecht bleibt, eine Ebene von der ersten Geraden beschrieben wird. Diese Ebene wird auf der Geraden nach §. 7. senkrecht stehen.
2. Bewegt sich ein Punkt um eine Gerade, und behält stets dieselbe Entfernung von der Geraden, so beschreibt er einen Kreisbogen, dessen Ebene auf der Geraden senkrecht steht. Zieht man also von dem Punkte aus auf die Gerade, um welche er sich bewegt, eine senkrechte Ebene, so wird in dieser der Punkt bei seiner Bewegung stets bleiben, und die Peripherie eines Kreises beschreiben, dessen Mittelpunkt der Durchgangspunkt der Geraden mit der Ebene ist.
3. Nimmt man eine Ebene an, die zwei sich schneidende Ebenen trifft; so müssen ihre Communsektionen mit diesen Ebenen eine einzige Gerade bilden, sobald man die Ebenen um ihre gemeinschaftliche Gerade dreht, und in eine Ebene legt.

§. 24.

(Fig. 7.) Nimmt man in einer Ebene MN einen Punkt B an, zieht BA senkrecht auf die Ebene, und zieht von dem Punkte B auf CE, die in der Ebene MN liegt, die Senkrechte BD, verbindet den beliebig auf BA angenommenen Punkt A mit D durch die Gerade AD. macht DC = DE, und denkt sich nun die Hülfslinien CA, CB, EA und EB gezogen; so muss BC = BE sein (wegen der Congruenz der Dreiecke EDB und BDC), daher auch CA = EA (weil $\triangle$ CAB $\overline{\sim}$ $\triangle$ ABE ist), und mithin $\triangle$ ACE gleichschenklig sein. Da nun DC = DE, also die Grundlinie dieses Dreieckes in D halbirt ist, so wird AD senkrecht auf CE sein. Es folgt also:

1. Zieht man auf eine Ebene eine Senkrechte, von ihrem Fusse aus auf eine in derselben Ebene liegende Gerade eine Senkrechte, und zieht von dem Punkte, in welchem letztere die Gerade trifft nach einem beliebigen Punkte der ersteren Senkrechten eine Gerade, so wird diese Gerade auf der in der Ebene angenommenen Geraden senkrecht sein.
2. Die in der Ebene angenommene Gerade wird senkrecht auf der Ebene sein, welche man durch BD und BA legen kann.

Parallele Lagen von Geraden u. Ebenen

§. 25.

Schneidet eine Gerade eine gegebene Ebene nicht, so weit man auch beide verlängern mag, so ist die Gerade parallel zur Ebene, und letztere parallel zur Geraden. — Liegen zwei oder mehrere Ebenen so, dass man dieselben so weit als man will verlängert denken kann, ohne dass sie sich treffen so sind diese Ebenen unter sich parallel.

§. 26.

(Fig. 9.) Sind zwei Gerade AB und ED parallel, und es steht AB senkrecht auf Ebene MN, so muss auch DE senkrecht auf Ebene MN sein. Denn denkt man sich durch AB und DE eine Ebene gelegt, so wird diese die Ebene MN nach BE schneiden, und es wird mithin (nach einem Satze der ebenen Geometrie) DE senkrecht auf BE sein. Zieht man nun EF senkrecht auf BE in der Ebene MN, so muss EF senkrecht auf Ebene EBAD sein nach §. 24., und folglich auch auf ED, weil diese in der Ebene EBAD liegt. Da nun DE senkrecht auf EF und BE steht, und diese beide Gerade in Ebene MN liegen, so folgt also der Satz:

Sind zwei Gerade parallel, und steht eine derselben auf einer Ebene senkrecht, so muss die andere auf derselben Ebene senkrecht sein.

§. 27.

(Fig. 10.) Zwei Gerade, die auf einer und derselben Ebene senkrecht sind, müssen parallel sein. Ist nämlich AB sowohl, als CD senkrecht auf Ebene MN, und man zieht von D aus eine Gerade DE, die parallel zu AB ist, so muss DE nach vor. §. senkrecht auf Ebene MN sein, was aber nach §. 15. nur dann statt finden kann, wenn DE mit DC in einer Richtung liegt, so dass also DC selbst die durch D mit BA gezogene Parallele sein muss.

§. 28.

(Fig. 15.) Ist $AB \neq CD$, und $AB \neq EF$, und man legt durch B eine Ebene MN senkrecht auf AB, so muss nach §. 26., CD sowohl, als EF senkrecht auf Ebene MN sein, und mithin ist nach §. 27. $CD \neq EF$, woraus also folgt, dass wenn zwei Gerade parallel zu einer dritten sind, jene auch unter sich parallel sein müssen; oder wenn eine Gerade parallel mit mehreren anderen Geraden ist, so müssen letztere auch unter sich parallel sein.

§. 29.

(Fig. 8.) Ist $AB \neq CD$, und liegt CD in der Ebene MN, so wird AB die Ebene MN nicht treffen, so weit man beide verlängert. Denkt man sich nämlich durch AB eine beliebige Ebene gelegt, und von einem Punkte der Communsektion dieser Ebene mit MN eine Parallele zu CD gezogen, so muss diese Parallele auch zu AB parallel sein (nach §. 28.), und mithin nach §. 11. in der durch AB gelegten Ebene ganz und gar liegen, so dass sie also Communsektion sein wird von der durch AB gelegten Ebene und MN. Es kann also AB diese Communsektion nicht treffen, und mithin auch die Ebene in keinem Punkte, weil die Communsektion jeder Ebene, welche durch einen Punkt von MN und durch AB gelegt wird, und der Ebene MN, mit AB parallel ist. Hieraus folgt also:

1. Ist eine Gerade mit einer in einer gegebenen Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie mit der Ebene selbst parallel.
2. Jede durch die erstere Gerade gelegte Ebene schneidet die gegebene nach einer Geraden, die mit jener parallel ist. —

§. 30.

Ist eine Gerade mit einer Ebene parallel, so ist sie von der Ebene überall gleich weit entfernt.

Unter Entfernung dieser Geraden von der Ebene versteht man nämlich den zwischen der Geraden und Ebene enthaltenen Theil einer Geraden, welche auf beiden senkrecht steht. Betrachtet man nun zwei solche Entfernungen, so sind dieselben parallel, und liegen in einem Viereche, das ein Parallelegramm sein muss, was aus dem vor. §. einleuchtet. —

§. 31.

Soll man zu einer Geraden eine Ebene parallel legen, so darf man nur eine Gerade ziehen parallel der gegebenen Geraden, durch letztere eine Ebene legen, so wird diese parallel zur gegebenen Geraden sein. —

§. 32.

(Fig. 12.) Hat man zwei Ebenen MN und QR, die beide auf der Geraden AB senkrecht stehen, so können sich beide Ebenen nicht schneiden, so weit man auch jede derselben verlängern mag. Würden dieselben sich schneiden, und wäre C ein Punkt ihres Durchschnittes, so müsste, weil C in jeder der beiden Ebenen liegen würde, CA in Ebene MN, CB in Ebene QR ganz und gar liegen, und folglich auch AB sowohl auf CA, als auch auf CB senkrecht stehen. Da aber AB nicht auf diesen beiden Geraden zugleich senkrecht sein kann, so kann auch C kein Punkt der Communsektion beider Ebenen sein. Von jedem andern Punkte, der im Durchschnitte beider Ebenen liegen sollte, könnte man aber auf dieselbe Weise zeigen, dass die Verbindungslinien desselben mit A und B senkrecht auf AB sein müssten, was aber ungereimt ist; mithin kann es keinen Punkt geben, der im Durchschnitte beider Ebenen liegt, oder beide Ebenen schneiden sich nicht, so weit man sie auch verlängern mag. Stehen also zwei Ebenen auf einer Geraden senkrecht, so sind dieselben parallel.

§. 33.

(Fig. 11.) Sind die beiden Ebenen MN und PQ parallel, und es schneidet eine dritte Ebene DB dieselben nach AB und CD, so können diese beiden Geraden sich nie schneiden, so weit man sie auch verlängern würde, weil sie in zwei parallelen Ebenen sich befinden. Diese beiden Geraden AB und CD liegen aber zugleich in einer Ebene, und müssen desshalb parallel sein. Werden also zwei parallele Ebenen durch irgend eine dritte Ebene geschnitten, so sind die Durchschnitte parallel.

§. 34.

(Fig. 13.) PQ und MN seien zwei parallele Ebenen, AB sei eine Gerade, die senkrecht auf MN ist. Legt man nun durch AB verschiedene Ebenen, z. B. BC und BE, so muss nach vor. §., AE, $\neq$ BF und AC $\neq$ BD sein. Da aber AB senkrecht auf Ebene MN, also nach §. 7. senkrecht auf BF, und aus demselben Grunde auch senkrecht auf BD ist, so muss AE als Parallele zu BF auch senkrecht auf AB, und ebenso AC als Parallele zu BD senkrecht auf AB sein. Da also AB senkrecht auf AE sowohl, als auch auf AC ist, so muss BA senkrecht auf Ebene PQ sein. Es folgt also hieraus:

1. dass wenn eine Gerade senkrecht auf einer von zwei parallelen Ebenen ist, dieselbe auch auf der andern Ebene senkrecht sein muss.
2. Dass man für zwei parallele Ebenen Gerade ziehen kann, die auf beiden Ebenen zugleich senkrecht stehen.

§. 35.

(Fig. 14.) Derjenige Theil einer solchen auf zwei parallelen Ebenen zugleich senkrecht stehenden Geraden, welcher zwischen beiden Ebenen enthalten ist, wird ihr Abstand oder ihre Entfernung genannt. Denkt man sich für die beiden parallelen Ebenen PQ und MN die Entfernungen AB, CD, EF etc. etc. gezogen; so werden diese Geraden nach §. 27. unter sich parallel sein, und man kann daher nach §. 11. durch je zwei derselben eine Ebene legen. Durch AB und CD die Ebene BC gelegt, gibt die Durchschnitte AC $\neq$ BD; mithin ist ACDB ein Rechteck, und folglich AB $=$ CD. Auf dieselbe Weise kann gezeigt werden, dass CD $=$ EF ist, folglich auch AB $=$ EF. Hieraus folgt also der Satz:

Parallele Ebenen sind überall gleich weit von einander entfernt.

§. 36.

(Fig. 16.) Es sei CA $\neq$ $C_1 A_1$, AB $\neq$ $A_1 B_1$, von diesen Geraden sei ferner angenommen, dass, wenn $<$ CAB ein spitzer Winkel ist, auch $< C_1 A_1 B_1$ ein solcher sein soll, und ist $<$ CAB ein stumpfer, so soll $< C_1 A_1 B_1$ auch ein stumpfer Winkel sein. Macht man nun AC $=$ $A_1 C_1$, AB $=$ $A_1 B_1$, zieht die Hülfslinien CC_1, AA_1, BB_1, CB und $C_1 B_1$, so ist

1. $CC_1 \neq$ und $=$ AA_1, weil AC $\neq$ und $=$ $A_1 C_1$ ist,
2. $BB_1 \neq$ und $=$ AA_1, weil AB $\neq$ und $=$ $A_1 B_1$, und mithin (nach §. 48.)
3. $CC_1 \neq$ und $=$ BB_1, folglich auch
4. CB $\neq$ und $=$ $C_1 B_1$. Da also CB $=$ $C_1 B_1$, CA $=$ $C_1 A_1$, AB $=$ $A_1 B_1$, so ist
5. $<$ CAB $=$ $< C_1 A_1 B_1$.

Es muss aber auch Ebene CBA $\neq$ Ebene $C_1 A_1 B_1$ sein, denn wäre diess nicht der Fall, so könnte man durch C eine Ebene parallel zur Ebene $C_1 A_1 B_1$ legen. Diese soll AA_1 in D treffen, so müsste (§. 35.) CD $\neq$ $C_1 A_1$ sein, und folglich auch $DA_1 = CC_1 = AA_1$ sein, was absurd ist. Es folgt also:

1. Sind zwei Gerade im Raume parallel zu zwei anderen Geraden, so muss der spitze oder stumpfe Winkel, unter welchen sich die beiden ersteren Geraden schneiden, gleich dem spitzen oder stumpfen Winkel sein, den die beiden letzteren Geraden bilden.
2. Die Ebene, welche durch die ersten zwei Geraden bestimmt ist, muss parallel sein zur Ebene der beiden letzteren Geraden.

§. 37.

(Fig. 17.) Zieht man in einer Ebene $M_1 N_1$ die sich schneidenden Geraden $A_1 B_1$, $A_1 C_1$, legt durch einen Punkt A_2 die Geraden $A_2 B_2$ und $A_2 C_2$ parallel zu den vorigen, so wird die durch $A_2 C_2$ und $A_2 B_2$ gelegte Ebene nach vor. §. parallel zur Ebene $M_1 N_1$ sein müssen. —

§. 38.

Aus den vorigen Paragaphen werden nachfolgende Sätze klar, und können leicht erwiesen werden:

1. Durch einen Punkt im Raume kann man nur eine Ebene parallel zu einer andern ziehen.
2. Die in gleicher Entfernung von einer Ebene parallel zu dieser gelegten Ebenen müssen zusammenfallen, und eine einzige Ebene bilden.
3. Durch eine Gerade kann man auf eine gegebene Ebene nur eine einzige Ebene senkrecht ziehen.
4. Sind zwei Ebenen einzeln parallel zu zwei anderen Ebenen, so muss die Communsektion der ersten beiden, parallel zur Communsektion der beiden letzten Ebenen sein. —

§. 39.

(Fig. 18.) Werden die beiden in verschiedenen Ebenen liegenden Geraden AB und CD von drei parallelen Ebenen $M_1 N_1$, $M_2 N_2$

$M_3 N_3$ geschnitten, so müssen die Theile AF, FB, DE und EC dieser Geraden, welche zwischen den parallelen Ebenen enthalten sind, in gleichem Verhältnisse stehen.

Legt man, um diess nachzuweisen, durch AB und D eine Ebene, und eine solche durch DC und B, so wird BGD auf der Communsektion von beiden liegen (wobei G der Durchgangspunkt von BD mit Ebene $M_2 N_2$ sein soll). Ebenso müssen AD und FG auf den Durchschnitten von Ebene ABD mit den Ebenen $M_1 N_1$ und $M_2 N_2$ sein; ferner GE und BC auf den Durchschnitten von Ebene DBC mit den Ebenen $M_2 N_2$ und $M_3 N_3$. Es muss mithin

$AD \neq FG$ und $GE \neq BC$ sein,

folglich werden nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie folgende Proportionen statt finden:

$BF : FA = BG : GD$ und

$EC : ED = BG : GD$.

Durch Verbindung dieser beiden Proportionen erhält man die Proportion

$BF : FA = CE : ED$ oder $BF : CE = FA : ED$,

welche nachzuweisen war. —

Anmerk. Würden diese Geraden sich schneiden, so würde der Satz schon aus dem in der ebenen Geometrie vorgekommenen hervorgehen; und würden diese Geraden parallel sein, so wären die zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenen Theile derselben einander gleich, mithin der Satz ebenfalls schon klar. —

§. 40.

(Fig. 19.) Nachdem wir nun parallele Ebenen betrachtet haben, wollen wir endlich auch zwei sich schneidende Ebenen in Betrachtung ziehen, und von diesen zuerst ihren Neigungswinkel aufzusuchen lehren. Hat man zwei Ebenen MN und PQ, welche sich nach einer Geraden schneiden, auf welcher MQ enthalten ist, und man zieht durch A_1, A_2 etc. etc., $A_1 B_1 \neq A_2 B_2$ etc. etc. in der Ebene MN, sodann $A_1 C_1 \neq A_2 C_2$ etc. etc. in der Ebene PQ, so ist nach §. 36. $\sphericalangle B_1 A_1 C_1 = \sphericalangle B_2 A_2 C_2$ u. s. w. Nimmt man also auf der Communsektion zweier Ebenen einen Punkt an, zieht von diesem zwei Senkrechte auf die Communsektion, von welchen die eine in der einen Ebene, die andere in der andern Ebene liegt, so bleibt der Winkel dieser beiden Senkrechten unveränderlich, so lange die beiden Ebenen dieselbe Neigung gegen einander haben. Dieser Winkel ist also auch unabhängig von dem Orte, in welchem der Punkt auf der Communsektion angenommen wird. —

§. 41.

(Fig. 20.) Von dem vorhin erwähnten Winkel soll nun nachgewiesen werden, dass er den Winkel beider Ebenen misst. — Vor Allem folgende Betrachtung: Es sei ($P_1 Q_1$) die eine, ($M_1 N_1$) die andere Ebene, die sich nach $M_1 Q_1$ schneiden. Zieht man nun $A_1 B_1$ senkrecht auf $M_1 Q_1$ in Ebene $M_1 N_1$, dann $A_1 C_1$ senkrecht auf $M_1 Q_1$ in Ebene $Q_1 P_1$, so bleibt dieser Winkel $B_1 A_1 C_1$ bei derselben Neigung beider Ebenen unveränderlich (nach §. 40.). Theilt man nun diesen Winkel in gleiche Theile, und denkt sich durch jede dieser Theilungslinien und $M_1 Q_1$ eine Ebene gelegt, so wird der Winkel beider Ebenen in ebenso viele Theile getheilt, als in wie viele der $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ getheilt wurde. Diese Theile müssen aber auch einander kongruent sein; denn sind $\sphericalangle b_1 A_1 C_1$, $\sphericalangle a_1 A_1 b_1$, $\sphericalangle a_1 A_1 B_1$ drei gleiche Theile, in welche $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ getheilt wurde, und man legt z. B. die Ebene, welche durch $b_1 A_1$ und $M_1 Q_1$ gedacht werden kann, auf die Ebene, welche man durch $a_1 A_1$ und $M_1 Q_1$ legen kann, so muss, weil $\sphericalangle a_1 A_1 b_1 = \sphericalangle a_1 A_1 B_1$ ist, auch $a_1 A_1$ auf $A_1 B_1$ zu liegen kommen, also auch die Ebene, die durch $a_1 A_1$ und $Q_1 M_1$ gedacht wird, mit Ebene $B_1 A_1 M_1$ zusammenfallen nach §. 10. Aus diesem Grunde müssen also die Theile, in welche der Winkel beider Ebenen getheilt wurde so in einander gebracht werden können, dass sie sich decken, also müssen dieselben einander gleich sein. —

§. 42.

(Fig. 20). Hat man nun zwei Winkel, von welchen der eine die Neigung von $P_1 Q_1$ und $M_1 N_1$, der andere die Neigung von $Q_2 P_2$ und $M_2 N_2$ angibt, und man zieht auch $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$ so, dass $A_2 B_2$ senkrecht auf $Q_2 M_2$ in Ebene $M_2 N_2$, und $A_2 C_2$ senkrecht auf $Q_2 M_2$ in Ebene $Q_2 P_2$ ist, so kann

1. $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ kommensurabel mit $B_2 A_2 C_2$ sein.
2. $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ inkommensurabel gegen $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$.

Ad 1. Haben diese Winkel ein gemeinschaftliches Maass, das m mal im $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$, und n mal im $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$ enthalten ist, wobei m und n ganze Zahlen bedeuten, so ist, weil $\sphericalangle B_1 A_1 C_1 = m \cdot p$, $\sphericalangle B_2 A_2 C_2 = n \cdot p$, auch

$$\sphericalangle B_1 A_1 C_1 : \sphericalangle B_2 A_2 C_2 = m : n$$

Trägt man nun den $\sphericalangle p$ auf $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ sowohl, als auf $\sphericalangle B_2 A_2 C_2$ so oft, als diess möglich ist, nämlich m mal auf ersteren und n mal auf letzteren, und legt durch jede Theilungslinie des $\sphericalangle B_1 A_1 C_1$ und $M_1 Q_1$ eine Ebene, so wird $\sphericalangle$ (Ebene $Q_1 P_1$, Ebene $M_1 N_1$) bildet in so viele gleiche Winkel getheilt, als m angezeigt, und ist daher ein solcher Theil P, so wird $\sphericalangle$ (Ebene $Q_1 P_1$, Ebene $M_1 N_1$) $= m \cdot P$. Legt

man ebenso durch $P_2 M_2$ und jede der Theilungslinien des $< B_2 A_2 C_2$ eine Ebene, so wird $<$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) in n gleiche Theile getheilt (§. 41.), von welchen ein Theil P sein muss, so dass man hat

$<$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) $=$ n . P,

daher

$<$ (Ebene $P_1 Q_1$, Ebene $M_1 N_1$) : $<$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) $=$ m : n,

also auch

$<$ (Ebene $P_1 Q_1$, Ebene $M_1 N_1$) : $<$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) $= < B_1 A_1 C_1 : < B_2 A_2 C_2$

Es verhalten sich also die Winkel, welche Ebenen bilden ebenso zu einander, wie sich die Linienwinkel verhalten, welche man nach §. 40. erhält, wenn diese Linienwinkel kommensurabel sind.

Ad 2. Sind $< B_1 A_1 C_1$ und $< B_2 A_2 C_2$ inkommensurabel, so muss jene Proportion doch statt finden. Denn wäre

$<$ (Ebene $P_1 Q_1$, $M_1 N_1$) : $<$ (Ebene $P_2 Q_2$, Ebene $M_2 N_2$) $= < B_1 A_1 C_1$, : einem Winkel, der $>$ oder $<$ als $B_2 A_2 C_2$ ist, z. B. $<$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $Q_1 P_1$) : $<$ (Ebene $M_2 N_2$, $P_2 Q_2$) $= < B_1 A_1 C_1 : < q\ A_2 C_2$, wobei $q\ A_2 C_2$ ein Theil von $B_2 A_2 C_2$ ist; so kann man durch fortgesetztes Halbiren $< B_1 A_1 C_1$ in so viele gleiche Theile theilen, dass ein solcher Theil kleiner, als $< B_2 A_2 q$ wird. Trägt man einen solchen Theil auf $< B_2 A_2 C_2$ so oft, dass eine Theilungslinie einmal zwischen $B_2 A_2$ und $A_2 q$ fällt, z. B. auf $A_2 m$, legt durch $m A_2$ und $M_1 Q_2$ eine Ebene, so muss $<$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $P_1 Q_1$) : $<$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $M_2 m$) $= < B_1 A_1 C_1 : < m A_2 C_2$

Es müsste daher auch

$<$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $P_2 Q_2$) : $<$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $M_2 m$) $= < q A_2 C_2 : < m A_2 C_2$

was ungereimt ist, mithin muss

$<$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $P_1 Q_1$) : $<$ (Ebene $M_2 N_2$, Ebene $P_2 Q_2$) $= < B_1 A_1 C_1 : < B_2 A_2 C_2$

Es folgt also: Dass sich der Winkel zweier Ebenen zum Winkel zweier anderer Ebenen verhält, wie sich ihre Linienwinkel zu einander verhalten, die man nach §. 40. erhält. —

§. 43.

(Fig. 20.) Man hat also aus der letzten Proportion des vor. §., $<$ (Ebene $M_2 N_2$, $P_2 Q_2$) $= < B_2 A_2 C_2 \times <$ (Ebene $M_1 N_1$, $Q_1 P_1$), wenn $< B_1 A_1 C_1$ Winkeleinheit für $< B_2 A_2 C_2$, und $<$ (Ebene $M_1 N_1$, Ebene $Q_1 P_1$) Einheit für Winkel zweier Ebenen wäre. Hieraus folgt also der Satz:

Der Winkel, unter dem zwei Ebenen gegen einander geneigt sind, wird gemessen durch einen Winkel, den man erhält, wenn man von einem beliebig in der Communsektion angenommenen Punkte zwei Senkrechte auf diese zieht, von welchen die eine in der ersten Ebene, die andere in der zweiten Ebene liegt. Der Winkel, den diese zwei Senkrechten bilden kann mithin Neigungswinkel beider Ebenen genannt werden. —

§. 44.

Von zwei Ebenen sagt man, dass sie auf einander senkrecht sind, wenn ihr Neigungswinkel ein Rechter ist. — Ferner geht aus dem vor. §. hervor, dass wenn eine Ebene eine andere schneidet, ihre Nebenwinkel in Summe zwei Rechte ausmachen und ihre Scheitelwinkel einander gleich sein müssen, weil diese Sätze für ihre Neigungswinkel, nämlich für ihre Maasse statt finden. —

§. 45.

(Fig 21.) M N sei eine beliebige Ebene, A B eine auf dieser Ebene senkrechte Gerade. Legt man durch A B eine beliebige Ebene P Q, deren Durchschnitt mit Ebene M N die Gerade B P sei, so wird A B senkrecht auf B P stehen. Zieht man ferner B C in Ebene M N senkrecht auf B P, so wird nach §. 43., $<$ A B C der Neigungswinkel für Ebene M N und Ebene P Q sein. Es ist aber A B senkrecht auf Ebene M N, also senkrecht auf A C, mithin $<$ A B C ein Rechter; folglich ist Ebene P Q senkrecht auf Ebene M N. Steht also eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, und man legt durch diese Gerade eine beliebige Ebene, so wird diese auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen. —

Anmerk. Soll daher durch eine Gerade eine Ebene gezogen werden, die senkrecht auf einer gegebenen Ebene ist, so ziehe man von einem beliebigen Punkte der gegebenen Geraden eine Senkrechte auf die Ebene, lege durch letztere und die gegebene Gerade eine Ebene, so wird diese die verlangte sein. —

§. 46.

(Fig. 21.) Ist Ebene P Q senkrecht auf Ebene M N, der Durchschnitt beider Ebenen die Gerade B P, und man zieht von einem beliebigen Punkte B dieser Communsektion die Gerade B A senkrecht auf B P in Ebene P Q, so muss B A auch senkrecht auf Ebene M N sein. Denn zieht man B C senkrecht auf B P in Ebene M N, so muss nach §. 44. der

$< ABC = R$ sein. Nun ist aber $< ABP$ schon ein Rechter, und mithin ist nach §. 12. auch AB senkrecht auf Ebene MN. Da es gleichgültig ist, ob man von B aus oder von einem beliebigen in der Ebene PQ liegenden Punkte die Senkrechte AB zieht, so können wir diesen Satz auch wie folgt, aussprechen:

Steht eine Ebene senkrecht auf einer zweiten, und man nimmt in der ersteren einen beliebigen Punkt an, fällt von diesem auf die Communsektion beider Ebenen eine Senkrechte, so muss letztere auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

§. 47.

(Fig. 21.) Ist wieder angenommen, dass Ebene PQ senkrecht auf Ebene MN steht, und man zieht von einem Punkte B ihrer Communsektion die Gerade BA senkrecht auf Ebene MN, so wird diess die einzige von B aus auf Ebene MN mögliche Senkrechte (§. 15.) sein. Wenn man aber von B aus auf BP in Ebene PQ eine Senkrechte zieht, so muss diese nach §. 46. auch auf Ebene MA senkrecht stehen; folglich fällt diese Senkrechte mit der angenommenen BA zusammen, woraus folgender Satz hervorgeht:

Steht eine Ebene senkrecht auf einer andern, und man zieht von einem beliebigen Punkte ihrer Communsektion eine Senkrechte auf die zweite Ebene, so muss diese Senkrechte in der ersten Ebene liegen.

§. 48.

(Fig. 22.) Steht die Ebene PQ sowohl, als auch die Ebene RS senkrecht auf der Ebene MN, so muss der Durchschnitt der beiden ersten Ebenen, nämlich AB, auch senkrecht auf der dritten Ebene stehen. Ist B der Punkt, den die drei Ebenen gemeinschaftlich haben, und man zieht von diesem eine Senkrechte auf Ebene MN, so muss diese Senkrechte nach §. 47. in jeder der beiden andern Ebenen liegen; folglich der Durchschnitt dieser beiden ersten Ebenen sein.

Stehen also zwei Ebenen senkrecht auf einer dritten, so muss auch die Communsektion jener Ebenen senkrecht auf der dritten Ebene stehen.

§. 49.

(Fig. 23.) Hat man drei Gerade, von welchen je zwei unter rechten Winkeln gegen einander geneigt sind, und man legt durch je zwei derselben eine Ebene, so muss (nach §. 12.) eine jede dieser Geraden senkrecht auf der Ebene der beiden andern sein. Jede dieser Ebenen muss aber auch (nach §. 45.) senkrecht auf den beiden andern sein. Solche drei Ebenen werden uns später unter dem Namen rechtwinklige Corrdinatenebenen oder Projektionstafeln vorkommen; die Geraden AB, BC, BD, durch welche die Ebenen gelegt werden, oder welche die Durchschnittslinien derselben sind, werden dann Corrdinatenaxen oder Axen genannt. —

§. 50.

(Fig. 26.) Für den Neigungswinkel zweier Ebenen MN und PQ können noch folgende Sätze angeführt werden:

1. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Communsektion zweier Ebenen auf dieselbe eine Ebene senkrecht, so schneidet letzere die beiden gegebenen Ebenen nach Geraden, welche auf der Communsektion senkrecht sein müssen (nach §. 12.), und die nach Annahme durch den gegebenen Punkt gehen; folglich werden dieselben den Neigungswinkel beider Ebenen bilden. —
2. Zieht man von einem zwischen beiden Ebenen liegenden Punkte aus auf jede der beiden Ebenen eine Senkrechte, so werden diese beiden Senkrechten unter sich einen Winkel bilden, der den Neigungswinkel beider Ebenen zu zwei Rechten ergänzt.

Ist nämlich D der angenommene Punkt, DA senkrecht auf Ebene MN, DB senkrecht auf Ebene PQ, und man denkt sich nun durch DA und DB eine Ebene gelegt, so muss diese die Gerade PM (nach §. 5.) in einem Punkte schneiden, welches hier der Punkt C sein soll. Trifft nun die eine Senkrechte DA die Ebene MN in A, die andere DB die Ebene PQ in B, und man zieht die Geraden AC und CB, so werden diese den Communsektionen der Hülfsebene und der beiden gegebenen Ebenen angehören, so dass also das Viereck CAMB ganz und gar in der Hülfsebene liegt. Nun muss aber nach §. 7. $< MAC$ gleich $< MBC = R$ sein, mithin $< ACB + < AMB = 2R$. Da aber $< ACB$ (nach §. 43.) der Neigungswinkel der Ebenen MN und PQ ist, so ergänzt der $< AMB$, nämlich der Winkel beider Senkrechten den Winkel beider Ebenen zu zwei Rechten. —

§. 51.

(Fig. 25.) L_1 und L_2 seien zwei Gerade, die weder parallel sind, noch sich schneiden, so weit

man sie auch verlängern mag. Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Geraden L_2 eine Gerade $'L_1$ parallel zu L_1, ferner durch einen beliebigen Punkt der Geraden L_1 eine Parallele $'L_2$ zu L_2, legt durch L_1 und $'L_2$ eine Ebene E_1, durch $'L_1$ und L_2 eine Ebene E_2, so wird nach §. 29., E_1 parallel zu L_2 und E_2 parallel zu L_1 sein müssen.

Man kann also durch jede von zwei sich nicht schneidenden und auch nicht parallelen Geraden eine Ebene legen, die parallel zur andern ist. —

§. 52.

(Fig. 25.) Legt man durch einen beliebigen Punkt und L_1 eine Ebene, sodann durch denselben Punkt und L_2 eine Ebene, so müssen diese beiden Ebenen sich schneiden nach einer Geraden C, welche mit L_1 in der ersten Ebene liegt, und mit L_2 in der zweiten Ebene, also sowohl L_1 als L_2 schneiden muss. Hieraus folgt also:

1. Man kann zwei in verschiedenen Ebenen liegende Gerade durch eine dritte schneiden, welche durch einen gegebenen Punkt geht. Daher kann man auch
2. drei in verschiedenen Ebenen liegende und sich nicht schneidende Gerade, durch eine und dieselbe Gerade schneiden, oder es gibt eine Gerade, welche diese drei Gerade zugleich trifft.

§. 53.

(Fig. 24.) AB und CD seien zwei in verschiedenen Ebenen befindliche und sich nicht schneidende Gerade. Legt man durch CD eine Ebene MN, welche parallel ist zu AB (nach §. 50.), zieht sodann von einem beliebigen Punkte E der Geraden AB eine Senkrechte auf Ebene MN, so wird diese Senkrechte EF die kürzeste Entfernung der Geraden AB von Ebene MN, und mithin nach §. 30. so gross sein, als eine Senkrechte, die von einem andern Punkte 'E auf Ebene MN gezogen wird. Rückt man aber die Senkrechte EF an der Geraden AB so lange fort, bis sie (senkrecht auf Ebene MN bleibend) die Gerade CD in 'F trifft, so wird sie in dieser Lage senkrecht auf CD sein (nach §. 7.), und aus demselben Grunde senkrecht auf A″B″, die durch F′ parallel zu AB gezogen werden kann. Diese Gerade 'E'F wird also auch senkrecht auf AB sein (nach ebener Geometrie), und mithin die Eigenschaft haben, senkrecht auf den beiden Geraden AB und CD zu sein, woraus also folgt:

1. Für zwei in verschiedenen Ebenen liegende und sich nicht schneidende Gerade gibt es einen Ort, an welchem eine dritte Gerade auf beiden zugleich senkrecht ist.
2. Die Entfernung dieser beiden Punkte, deren Verbindungslinie senkrecht auf beiden Geraden steht, ist die kürzeste Entfernung beider Geraden.

§. 54.

(Fig. 27.) $\sphericalangle$ AEB, $\sphericalangle$ BEC und $\sphericalangle$ AEC sollen in verschiedenen Ebenen liegen, einen gemeinschaftlichen Scheitel E, und je zwei derselben auch einen gemeinschaftlichen Schenkel haben; so wird der durch die Ebene dieser drei Winkel eingehüllte körperliche Raum ein körperliches, dreiseitiges Eck genannt, dessen Scheitel E ist. Von diesem dreiseitigen körperlichen Eck lässt sich zeigen, dass je zwei der Winkel, die dasselbe bilden, in Summe grösser sein müssen, als der dritte. —

Sind die drei Winkel einander gleich, so ist jedenfalls die Summe zweier grösser, als der dritte; folglich ist nur der Fall zu erwähnen, in welchem die drei Winkel ungleich, also einer grösser, als jeder der beiden anderen Winkel ist. Ist diess der Winkel AEC, so schneide man von demselben ein Stück DEC ab, das gleich BEC ist, macht $DE = BE$, zieht in den Ebenen AEC, AEB und BEC die Hülfslinien ADC, AB und BC, so muss $DC = BC$ sein (weil $\triangle$ DEC $\cong$ $\triangle$ BEC ist). Es ist nun $AB + BC > AD + DC$ oder $AB > AD$, und da ferner AE des $\triangle$ AEB $=$ AE des $\triangle$ AED, $BE = DE$ ist, so muss $\sphericalangle$ AEB grösser als $\sphericalangle$ AED sein.

Mithin ist $\sphericalangle$ AEB + $\sphericalangle$ BEC grösser als $\sphericalangle$ AED + $\sphericalangle$ DEC oder

$\sphericalangle$ AEB + $\sphericalangle$ BEC grösser als $\sphericalangle$ AEC,

was nachzuweisen war. —

§. 55.

(Fig. 28.) Es seien die $\sphericalangle$ AMB, $\sphericalangle$ BMC, $\sphericalangle$ DMC, $\sphericalangle$ EMD und $\sphericalangle$ AME gegeben, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel M haben, und einen körperlichen Raum umschliessen; so wird dieser körperliche Raum ein vielseitiges Eck genannt, dessen Seiten die genannten Winkel sind. Schneidet man nun alle diese Winkel durch eine Ebene ab, welche dieselben nach den Geraden AB, BC, CD, DE und EA schneidet, so bilden diese letzteren Geraden ein Vieleck von so vielen Seiten, als von wie vielen Winkeln das körperliche Eck M gebildet wird. Nimmt man daher in dem Vielecke ABCDE den Punkt N an, und zieht von diesem aus nach allen Scheiteln Gerade, nämlich NA, NB etc. etc., so liegen um N herum, ebenso viele Dreiecke, als wie viele das körperli-

che Eck bei M umhüllen. Die Summe der Winkel derjenigen Dreiecke, in welche das Vieleck getheilt ist, muss mithin ebenso gross sein, als die Summe der Winkel derjenigen, welche das Eck bei M umschliessen. Es ist aber nach vor. §.: $\sphericalangle MAB + \sphericalangle MAE$ grösser als $\sphericalangle BAN + \sphericalangle NAE$, $\sphericalangle MEA + \sphericalangle MED$ grösser als $\sphericalangle AEN + \sphericalangle NED$, $\sphericalangle MDE + \sphericalangle MDC$ grösser als $\sphericalangle NDC + \sphericalangle NDE$, $\sphericalangle MCB + \sphericalangle MCD$ grösser als $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MBA$ grösser als $\sphericalangle ABC$, folglich müssen die Winkel, welche um N herum liegen in Summe mehr ausmachen, als diejenigen der Dreiecke ABM, MBC, DCM etc. etc., die den gemeinschaftlichen Scheitel M haben. Die aufeinanderfolgenden Winkel aber, deren gemeinschaftlicher Scheitel N ist, betragen in Summe 4 R, und mithin ist die Summe aller Winkel, welche das körperliche Eck bei M bilden, kleiner als vier Rechte.

§. 56.

Aus dem vorigen Satze folgt:

1. Aus regelmässigen Dreiecken kann man noch ein körperliches Eck bilden, wenn fünf einen gemeinschaftlichen Scheitel, und immer zwei auf einanderfolgende eine gemeinschaftliche Seite haben; denn $5 \times 60° = 300° < 4R$. Man kann mithin dreierlei körperliche Ecke aus regelmässigen Dreiecken bilden, nämlich ein körperliches Eck aus drei, eines aus vier regelmässigen Dreiecken und endlich ein körperliches Eck aus fünf regelmässigen Dreiecken.
2. Drei regelmässige Vierecke können noch ein körperliches Eck bilden, weil die Summe dreier solcher zusammenstossender Winkel nur 3 R ist. —
3. Da in einem regelmässigen Fünfecke ein Winkel $\frac{6}{5}$ R ist, und drei dieser Winkel ein körperliches Eck bilden können, so kann man aus drei regelmässigen Fünfecken ein körperliches Eck bilden. —

Anmerk. Aus regelmässigen Sechsecken, Siebenecken etc. etc. kann kein körperliches Eck mehr gebildet werden. —

Zweite Abtheilung.

Zweites Kapitel.

Principien der geometrischen Projectionslehre.

§. 57.

(Fig. 28.) Es seien drei sich schneidende Ebenen gegeben, die beliebige Neigungswinkel haben, die Durchschnitte derselben seien durch X, Y, Z, die eine dieser Ebenen sei durch (XY), die zweite durch (XZ), die dritte mit (YZ) bezeichnet, und endlich der allen dreien gemeinschaftliche Punkt sei O. Diese Ebenen kann man sich ausgedehnt denken, so weit man will, so dass jede darzustellende Grösse innerhalb des Raumes dieser drei Ebenen oder ihrer Verlängerungen sich befindet. Der Ort, in welchem sie angenommen werden, richtet sich nach der Lage des darzustellenden Gegenstandes. — Nimmt man nun innerhalb des Raumes dieser drei Ebenen einen Punkt an, denkt sich von diesem aus parallel zu den Durchschnitten X, Y, Z Gerade gezogen, und diese so weit verlängert, bis sie die Ebenen treffen, so reichen diese Durchgangspunkte oder die vom Punkte aus gezogenen Geraden hin, die Lage des Punktes im Raume wieder bestimmen zu können.

§. 58.

(Fig. 28.) Die vom gegebenen Punkte aus gezogenen Parallelen seien x, y, z, von welchen $x \neq X$ zwischen dem gegebenen Punkte und der Ebene (YZ), $z \neq Z$ zwischen dem Punkte und Ebene (XZ), $z \neq Z$ zwischen dem gegebenen Punkte und Ebene (XY) liegt; der Durchgangspunkt von z mit Ebene (XY) sei a, der von y mit Ebene (XZ) sei a', der Durchgangspunkt von x mit (YZ) sei a''. Wenn man nun von O aus auf X die Gerade $Ob = x$ aufträgt, von dem hiedurch erhaltenen Endpunkte b parallel zu Ebene (YZ) eine Ebene legt; sodann von O aus auf OY die Gerade $Ob'' = y$ trägt, und von b'' aus parallel zur Ebene (XZ) eine Ebene legt; endlich von O aus auf Z die Gerade $Ob' = z$ trägt, und von b' aus parallel zur Ebene (XY) eine Ebene zieht; so werden diese drei Ebenen einen gemeinschaftlichen Punkt haben, welcher der vorhin angegebene sein muss. Es ist also ein Punkt durch die Geraden x, y, z, bestimmt, wenn dabei noch angegeben ist, wie man dieselben auf die Durchschnitte X, Y, Z tragen soll: ob nämlich von O aus auf diese Durchschnitte selbst, oder auf ihre Verlängerungen.

§. 59.

(Fig. 28.) Wären aber die drei Punkte 'a, ''a und a gegeben, so reichen diese jedenfalls aus, den zugehörigen Punkt im Raume wieder zu bestimmen, wenn man gewiss ist, dass a, a', a'' die Durchgangspunkte der Geraden x, y, z mit den Ebenen (YZ), (XZ), (XY) sind. Denkt man sich nämlich durch a' eine Parallele zur Y, durch a'' eine Parallele zur X gezogen, so müssen diese — weil durch einen und denselben Punkt nur eine Parallele zu einer Geraden gezogen werden kann, und diese schon in den Parallelen liegen, die man vom gegebenen Punkte parallel zu X und Y gezogen hat — sich schneiden, und ihr Durchschnittspunkt ist der angegebene Punkt. Auf gleiche Weise könnte man vermittelst a' and a, und ebenso vermittelst a und a'' den Punkt im Raume wieder angeben. — Man ersieht hieraus,

dass wenn die drei Punkte a, a', a'' die Durchgangspuncte der x, y, z, mit den Ebenen (XY), (XZ), (YZ) sind, schon zwei derselben hinreichen, um die Lage des Punktes im Raume aus denselben wieder zu bestimmen. Man dürfte nur durch einen dieser zwei Punkte eine Ebene parallel zur dritten legen, so muss diese den zweiten Punkt enthalten; in dieser Ebene sodann von jedem der beiden Punkte aus parallele Gerade zu den Durchschnitten der dritten Ebene mit den Ebenen, in welchen die zwei Punkte liegen, ziehen, so muss der Durchschnitt dieser beiden Parallelen der gesuchte Punkt im Raume sein. —

§. 60.

Wenn man diese beliebige Lage der Ebenen beibehalten wollte, so müsste man,

1. um aus den Parallelen x, y, z, die Lage des Punktes im Raume genau bestimmen zu können, noch ein Merkmal angeben, durch welches man erkennt, ob dieselben bei der Bestimmung der Lage des Punktes im Raume auf X, Y, Z selbst oder auf ihre Verlängerungen aufgetragen werden müssen; —
2. ein Merkmal bezeichnen, um aus den Durch-

schnitten a, a′, a″ ersehen zu können, ob sich der Punkt innerhalb des Raumes der Ebenen (X Y), (X Z), (Y Z) befindet, oder innerhalb des Raumes, der von ihren Verlängerungen gebildet wird. —

§. 61.

(Fig. 29.) Wir wollen nun die Ebenen, auf welche wir einen Punkt bezogen haben, Coordinatenebenen oder Projektionstafeln, ihre Durchschnitte die Coordinatenaxen oder Axen und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt den Anfangspunkt der Coordinaten nennen. Die von einem Punkte aus parallel zu den Coordinatenaxen gezogenen Geraden werden projicirende Linien des Punktes, und ihre Durchschnitte mit den Tafeln Projektionen des Punktes genannt. Denkt man sich nun durch die projicirende Linien y und z eine Ebene gelegt, so wird diese nach §. 36. parallel mit (Y Z), und folglich auch ihre Communsektion C_1 mit (X Z) nach §. 29., parallel zur Axe Z, und ihre Communsektion C_2 mit (X Y), parallel Y sein. Es muss mithin nach §. 28. auch C_1 parallel mit z, und C_2 parallel mit y sein, und da nach §. 5. die Axe X von der Ebene, die durch (x z) gelegt wurde, nur in einem Punkte getroffen wird, so bilden die vier Gerade z, y, C_1 und C_2 ein Parallelogramm, in welchem $C_1 = z$ und $C_2 = y$ ist. Zieht man also von 'a aus parallel zur Axe Z eine Gerade bis zur Axe X, so ist diese gleich der z, und zieht man parallel zur Y von a aus eine Gerade bis zur X, so ist diese gleich y und beide Gerade müssen in einem Punkte der X zusammentreffen, wenn a und a′ die Projektionen eines einzigen Punktes sein sollen. Analog wird jetzt auch die von a aus in (X Y) parallel zur X bis Y gezogene Gerade gleich x, die von "a parallel zur Z bis Y gezogene Gerade gleich z sein, und mit der in (X Y) zur X parallel gezogenen Geraden in einem Punkte der Y zusammentreffen. Ebenso wird endlich die von 'a parallel zur Axe X bis Z gezogene Gerade gleich x, und die von "a aus parallel zur Y bis Z gezogene Gerade gleich y sein, beide Gerade aber in einem Punkte der Z zusammentreffen. Nennen wir die von den Projektionen des Punktes parallel zu den Axen gezogenen Geraden die Coordinaten des Punktes, so ersieht man leicht folgende Sätze:

1. Die in der Ebene (X Y) gezogenen Coordinaten sind gleich und parallel den projicirenden Linien y und z, die in der Ebene (X Z) liegenden Coordinaten des Punktes sind gleich und parallel den projicirenden Linien x und z, und endlich die in Ebene (Y Z) liegenden Coordinaten des Punktes, sind einzeln gleich und parallel den projicirenden Linien y und z.
2. Zwei der Projektionstafeln haben eine der Coordinaten gemeinschaftlich.
3. Jede der Coordinaten hat dieselbe Richtung in Bezug auf die Axen, als die projicirende Linie, mit welcher sie parallel ist.
4. Die zwei nicht gemeinschaftlichen Coordinaten zweier Tafeln treffen in einem Punkte der Axe dieser Tafeln zusammen.
5. Werden die drei Tafeln auf eine Ebene ausgebreitet (aufgeklappt), so kommen die Axen Y und Z nach §. 23. in eine Gerade zu liegen, wenn man die Ebene (Y Z) in die Verlängerung der Ebene (X Y) bringt, während die in (X Z) und (Y Z) liegenden Coordinaten, welche parallel zu Z und Y sind, nun eine einzige Gerade bilden, welche parallel zur Z ist die in (X Z) und (Y Z) liegenden Coordinaten, die parallel zu den Axen X und Z sind, kommen in eine Gerade zu liegen, die parallel zur X ist. —

§. 62.

In §. 60. wurde schon erwähnt, dass zur Bestimmung der Lage eines Punktes durch seine projicirende Linien oder durch seine Projektionen Merkmale nothwendig sind, die uns noch den Raum deutlich bezeichnen, innerhalb welchem sich der Punkt befindet. Setzen wir deshalb den projicirenden Linien, welche auf der Seite der Axen selbst liegen, das Zeichen (+) vor, so werden die mit diesen projicirenden Linien parallelen Coordinaten dasselbe Zeichen haben, und die mit den rückwärtigen Verlängerungen der Axen parallelen projicirenden Linien und Coordinaten das Zeichen (—) bekommen. Ferner werden die Projektionen eines Punktes, der innerhalb des Raumes der drei Tafeln selbst sich befindet, auf diese Tafeln zu liegen kommen, während nicht alle drei Projektionen eines andern Punktes auf die Tafeln selbst zu liegen kommen müssen, sondern auf ihre Verlängerungen zu liegen kommen können. Denkt man sich nämlich die Ebene (X Y) rückwärts über X hinaus verlängert, bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung durch (X Y′), und nimmt nun innerhalb des Raumes der Ebenen (X Z) und (X Y′) einen Punkt an, so wird seine Projektion für die Ebene (X Y) auf (X Y′) fallen, und in (X Z) zu liegen kommen, wenn man die Tafeln auf eine Ebene ausbreitet. Seine Coordinaten in (X Y′) liegen nun in (X Z), die mit y parallele Ordinate hat das Zeichen (—), die mit x parallele das Zeichen (+) vor sich, und sonst bleibt Alles, wie vorher. — Denkt man sich ferner Ebene (X Z) unterhalb (X)

verlängert, und bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung mit (X Z'), verlängert ferner Ebene (Y Z) unterhalb (Y) und gegen Z hinaus, und bezeichnet diese rückwärtige Verlängerung von (Y Z) mit (Y' Z'), nimmt sodann innerhalb des Raumes der Ebenen (X Y'), (X Z') und (Y' Z') einen Punkt an, so wird seine Projektion für (X Y) auf (X Y'), seine Projektion für (X Z) auf (X Z') und seine Projektion für (Y Z) in (Y' Z') liegen. Breitet man die Tafeln wie vorhin auf eine Ebene aus, so wird die Projektion des Punktes für (X Y) in (X Z), die Projektion für (X Z) in (X Y), und endlich die Projektion für (Y Z) in (X' Z) zu liegen kommen, während die Coordinaten, welche mit Y und Z parallel sind, das Zeichen (—) haben, die Abscisse aber, welche mit X parallel ist, das Zeichen (+) hat. Bezeichnet man die rückwärtige Verlängerung von (Y Z) unterhalb Z mit (Y Z'), und nimmt innerhalb des Raumes der Ebenen (Y Z'), (X Z') und (X Y) einen Punkt an, so werden seine Projektionen für diese drei Tafeln in (X Y) zu liegen kommen; seine Coordinaten, die parallel zu (X) und (Y) gehen, werden das Zeichen (+) haben, die mit Z parallele Ordinate aber wird das Zeichen (—) haben. Nimmt man die Lage des Punktes auch auf der andern Seite der Ebene (Y Z) an, so werden seine Projektionen für die Tafeln ebenso ermittelt werden können, wie diess im Obigen geschehen ist. Bei einer beliebigen Lage des Punktes kann man also aus seinen Projektionen sowohl, als aus seinen Coordinaten wieder auf die Lage zurückkommen. —

Anmerk. Es wäre nun leicht, auch die Lage eines Systems von Punkten durch ihre Projektionen oder durch ihre Coordinaten anzugeben. Da ferner die einzelnen Punkte dieses Systems durch Gerade verbunden gedacht werden können, und leicht nachgewiesen werden könnte, dass wenn ein Punkt in einer Geraden sich befindet, auch die Projektionen des Punktes in den Projektionen der Geraden liegen müssen; so kann man durch Wiederholung des im vor. §. gegebenen Verfahrens auch die Lage eines Polygons und die eines Polyeders bestimmen. —

§. 63.

Die bisher beliebig angenommene Lage der Projektionstafeln ist im Allgemeinen die unbequemste, weshalb nun eine bequemere Lage dieser Tafeln angenommen werden soll: die Tafeln seien nun unter rechten Winkeln gegen einander gestellt; so dass ihre Communsektionen ein rechtwinkliges Coordinatensystem bilden. Die Ebene der (X Y) können wir horizontal legen, und horizontale Projektionstafel, horizontale Tafel, die Ebene (X Z) erste vertikale Tafel, und die Ebene (Y Z) zweite vertikale Tafel nennen. Ebenso sollen die Projektionen eines Punktes für diese Tafeln, horizontale, vertikale und zweit-vertikale Projektionen, ferner die von der vertikalen Projektion aus parallel zus Z gezogene Ordinate vertikale Ordinate, die von der vertikalen Projektion parallel zu X gezogene Gerade Abscisse, die von der horizontalen Projektion parallel mit Y gezogene Ordinate horizontale Ordinate etc. genannt werden. — Durch diese Lage der Tafeln haben wir auch den Vortheil, dass die projicirenden Linien eines Punktes senkrecht auf den Projektionstafeln sind, und mithin die Abstände des Punktes von den Tafeln durch seine projicirende Linien angegeben werden. Die in den vorigen Paragraphen hergeleiteten Sätze werden nun nicht allein gelten, sondern einzelne derselben noch einfacher werden. Aus §. 61. folgt nämlich:

1. Die Projektion eines Punktes auf einer Ebene ist der Fuss der vom Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten.
2. Die Coordinaten eines Punktes stehen senkrecht auf den entsprechenden Projektionsaxen.
3. Die vertikale Ordinate des Punktes ist gleich seiner horizontal projicirenden Linie, und gibt daher den Abstand des gesuchten Punktes von der horizontalen Tafel an. Ebenso gibt die von der zweit-vertikalen Projektion des Punktes aus parallel zur Z gezogene Ordinate die Entfernung des Punktes von der horizontalen Tafel an. Die von der horizontalen Projektion des Punktes auf die Axe X gezogene Senkrechte oder die horizontale Ordinate des Punktes gibt die Entfernung desselben von der vertikalen Tafel an. (Fig. 30.) Ist also a' die vertikale, a die horizontale und a'' die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, und man zieht von a' auf Z die Senkrechte a' b', so ist diese die Abscisse des Punktes, une gibt seine Entfernung von der zweit-vertikalen Tafel an. Zieht man ferner von a' auf X die Senkrechte a' b, so ist diese die vertikale Ordinate des Punktes, und gibt seine Entfernung von der horizontalen Tafel an. Von a auf X die Senkrechte a b gezogen, so ist diese die horizontale Ordinate des Punktes, und gibt seine Entfernung von der vertikalen Tafel an, während die von a auf Y gezogene Senkrechte a b'' gleich a' b' ist, die Entfernung des Punktes von der zweit-vertikalen Tafel angibt. Endlich ist die von ''a auf Y gezogene Senkrechte a'' b'' gleich der vertikalen Ordinate 'a b, und gibt mithin seine Entfernung von der horitontalen Tafel an, und die von ''a auf Z gezogene Senkrechte ''a b' ist gleich a b der horizontalen Ordinate des Punktes im Raume. —

4. (Fig 29.) Breitet man die Tafeln auf einer Ebene so aus, dass die horizontale Tafel in der unterhalb X gedachten Verlängerung der vertikalen Tafel zu liegen kommt, und dreht die zweit-vertikale Tafel um die Axe Z, bis sie in die Verlängerung der vertikalen Tafel zu liegen kommt, also die Axe Y in der Verlängerung der X liegt; so wird die horizontale Projektion des Punkes mit seiner vertikalen Projektion in einer auf der Axe X senkrechten Geraden zu liegen kommen, nämlich in a′b a, die vertikale und zweit-vertikale Projektion wird in einer auf Z senkrechten Geraden a′b′a″ liegen, und die horizontale Projektion würde mit der zweit-vertikalen Projektion in einer auf Y senkrechten Geraden liegen, wenn man die zweit-vertikale Tafel um Y drehen, und in die Verlängerung der horizontalen Tafel legen würde. Es ist zwar dieser Satz schon aus §. 61. einleuchtend; allein da derselbe so oft angewendet wird, so soll er für diese neue Lage der Tafeln näher erörtert werden. Denkt man sich nämlich durch den Punkt eine Ebene senkrecht auf die Axe X gelegt, so wird diese in einem Punkte b getroffen, und die Durchschnitte dieser Ebene mit der vertikalen und horizontalen Tafel, die in der Richtung b′a und b a liegen, werden nach §. 12. senkrecht auf X sein. Es ist also ′a b senkrecht auf X in der vertikalen Tafel, und mithin parallel zur Axe Z, und a b senkrecht auf X in der horizontalen Tafel, folglich parallel zur Axe Y. Zieht man nun vom Punkte im Raume auf die vertikale Tafel eine Senkrechte, so muss diese nach §. 47. in der durch den Punkt auf X senkrecht gelegten Ebene liegen, und daher b′a treffen, welches in a′ geschehen soll, und a′ wird die vertikale Projektion des Punktes sein. Nach §. 47. muss auch die horizontal projicirende Linie (d. h. die vom Punkte auf die horizontale Tafel gezogene Senkrechte) in der gedachten Ebene liegen, also b a treffen, und diess soll in a geschehen, so wird a die horizontale Projektion des Punktes sein. Es bilden nun die Linien ′a b, a b mit der horizontal und vertikal projicirenden Linie des Punktes ein Rechteck, in welchem ′a b parallel der horizontal projicirenden Linie, also auch dieser gleich, und a b der vertikal projicirenden Linie parallel, und folglich auch dieser gleich sein muss. Legt man nun die horizontale Tafel, um X dieselbe drehend, in die Verlängerung der vertikalen Tafel, so muss a′b sowohl, als auch a b während der Drehung (nach §. 23.) in der durch den Punkt im Raume auf X senkrecht gelegten Ebene bleiben; mithin wird ′a b mit b a eine einzige Gerade bilden, die senkrecht auf X steht, nachdem die beiden Tafeln auf einer Ebene ausgebreitet sind. Auf gleiche Weise kann diess für die vertikale und zweit-vertikale Projektion des Punktes, und überhaupt für irgend zwei Projektionen eines Punktes bewiesen werden, wenn die Projektionstafeln rechte Winkel unter sich bilden. —

§. 64.

Es ist nach den Erläuterungen des vor. §. leicht zu erkennen, ob zwei Punkte, von welchen der eine in einer und der andere in einer andern Projektionstafel liegt, die Projektionen eines einzigen Punktes sind. Verbindet man nämlich beide Punkte durch eine Gerade, und es steht diese Gerade senkrecht auf der Durchschnittslinie beider Tafeln, so sind die beiden Punkte die Projektionen eines Punktes im Raume; steht aber jene Verbindungslinie nicht senkrecht auf der Durchschnittslinie beider Tafeln (nämlich auf der Projektionsaxe), so sind auch jene zwei Punkte nicht die Projektionen eines einzigen Punktes.

§. 65.

Es bleibt nun noch übrig, den §. 62. auch für dieses neue Coordinatensystem nochmal zu erwähnen, damit man noch aus den Projektionen oder aus den Coordinaten des Punktes, die Lage des letzteren wieder bestimmen kann. Sind nur zwei Projektionen eines Punktes gegeben, so kann man schon die Lage desselben bestimmen. (Fig. 30.) Ist nämlich a die horizontale und a′ die vertikale Projektion des Punktes gegeben, und man denkt sich vom Punkte a aus eine Senkrechte auf die horizontale Tafel gezogen, und diese so lange, als ba′ (seine vertikale Ordinate) gemacht, so wird, weil ba′ die Entfernung des Punktes von der horizontalen Tafel ist, der Endpunkt jener Senkrechten der gesuchte Punkt sein. Ebenso hätte man aus der vertikalen Projektion des Punktes und seiner horizontalen Ordinate denselben bestimmen können; indem man von a′ aus auf die vertikale Tafel eine Senkrechte gezogen hätte, und diese so lang gemacht, als seine horizontale Ordinate angibt. Wir wollen daher vorläufig bloss zwei Projektionen des Punktes, z. B. die horizontale und vertikale betrachten, und dann erst auf seine zweit-vertikale Projektion Rücksicht nehmen.*) Denken

*) Aus diesem Grunde werden wir auch immer einen Punkt dadurch angeben, dass wir seine horizontale und seine vertikale Projektion bestimmen, und wollen unter a′a auch einen Punkt im Raume verstehen, dessen Projektionen a, ′a sind.

wir uns die horizontale Tafel vor der Axe der X und hinter derselben, die vertikale Tafel oberhalb der Axe der X und unterhalb derselben so weit verlängert, als es in irgend einem Falle nothwendig wird: so kann der Punkt in Bezug auf diese Tafeln vier verschiedene Lagen annehmen, die hier erörtert werden sollen. Nennen wir zu diesem Zwecke den Raum, der von der horizontalen und vertikalen Tafel eingehüllt wird, ersten Quadranten; den Raum, welcher von der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel und der vertikalen Tafel eingehüllt wird, den zweiten Quadranten; den Raum, welcher von den rückwärtigen Verlängerungen beider Tafeln eingehüllt wird, dritten Quadranten und endlich den Raum, welcher zwischen der horizontalen und der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegt, vierten Quadranten. Liegt nun ein Punkt im ersten Quadranten, so wird seine horizontale Projektion sowohl, als auch seine vertikale Projektion auf die Tafeln selbst — nicht auf ihre Verlängerungen — fallen. Klappen wir daher die vertikale Tafel auf, so werden beide Projektionen auch in die entsprechende Tafel zu liegen kommen. (Fig. 32.) Liegt ein Punkte im zweiten Quadranten, so fällt seine horizontale Projektion auf die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel, seine vertikale Projektion auf den Theil der vertikalen Tafel, der früher durch (X Z) bezeichnet wurde. Bezeichnet man die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel durch (X Y'), so ist leicht einzusehen, dass, wenn beide Tafeln auf eine Ebene ausgebreitet werden, die horizontale Projektion a_2 des Punktes in die vertikale Tafel zu liegen kömmt, so dass jetzt $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate und $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate des Punktes ist. (Fig. 33.) Liegt ein Punkt im dritten Quadranten, so fällt seine horizontale Projektion auf (X Y'), seine vertikale Projektion auf die rückwärtige Verlängerung der vertikalen Tafel, nämlich auf (X Z'); mithin werden die Projektionen a_1, a'_1 des Punktes bei Ausbreitung der Tafeln in eine Ebene in den entgegengesetzten Tafeln erscheinen, nämlich die horizontale Projektion a_1 in der vertikalen und die vertikale Projektion a'_1 in der horizontalen Tafel, wobei aber wieder $a_1 b_1$ die horizontale Ordinate, $a'_1 b_1$ die vertikale Ordinate des Punktes sein wird. Befindet sich endlich ein Punkt im vierten Quadranten, so wird seine horizontale Projektion sowohl, als auch seine vertikale Projektion auf (X Y) fallen, also bei Ausbreitung der Tafeln auf eine Ebene beide Projektionen in der horizontalen Tafel erscheinen. Hieraus folgt also:

Ist die vertikale Tafel in die rückwärtige Verlängerung der horizontalen Tafel gelegt oder umgekehrt, so hat man folgende Merkmale für die Lage des Punktes im Raume:

1. Erscheint die horizontale Projektion in der horizontalen, die vertikale Projektion eines Punktes in der vertikalen Tafel, so liegt dieser Punkt im ersten Quadranten.
2. Ist jede der Projektionen des Punktes in der vertikalen Tafel, so liegt der Punkt im zweiten Quadranten.
3. Liegt die horizontale Projektion des Punktes in der vertikalen und seine vertikale Projektion in der horizontalen Tafel, so ist der Punkt im dritten Quadranten.
4. Ist endlich jede der beiden Projektionen in der horizontalen Tafel, so liegt der Punkt im vierten Quadranten.

§. 66.

Was die Coordinaten des Punktes betrifft, so wollen wir ihre Richtungen für einen Punkt im ersten Quadranten als positiv betrachten. Die vertikale Ordinate eines im zweiten Quadranten liegenden Punktes wird sodann positiv, seine horizontale Ordinate aber negativ sein, also ist in diesem Falle entweder die horizontale Ordinate ein Theil der vertikalen, oder letztere ein Theil der horizontalen Ordinate. Liegt ein Punkt im dritten Quadranten, so werden seine Coordinaten die entgegengesetzten Richtungen von denen eines Punktes im ersten Quadranten haben, also beide negativ sein. Ist endlich der Punkt im vierten Quadranten, so wird seine horizontale Ordinate dieselbe Richtung, wie im ersten Quadranten haben, also positiv sein, seine vertikale Ordinate aber die entgegengesetzte von der eines im ersten Quadranten liegenden Punktes haben, mithin negativ sein.

(Fig. 32.) Ist a_1 die horizontale und a'_1 die vertikale Projektion eines Punktes, so ist $a_1 b_1$ seine horizontale Ordinate, $a_1 b_1$ die vertikale Ordinate. Für den Punkt, der seine horizontale Projektion in a_2, seine vertikale Projektion in a'_2 hat, ist $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate, $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate. —

(Fig. 33.) Ist a_1 die horizontale und a'_1 die vertikale Projektion des Punktes, so ist $a'_1 b_1$ die vertikale Ordinate, $a_1 b_1$ die horizontale Ordinate. Für einen Punkt, dessen horizontale Projektion in a_2, seine vertikale Projektion in a'_2 ist, wird $a_2 b_2$ die horizontale Ordinate, $a'_2 b_2$ die vertikale Ordinate sein.

§. 67.

(Fig. 30.) Berücksichtigen wir nun auch die zweit-vertikale Tafel, und wollen daher zuerst aus der horizontalen und vertikalen Projektion die zweit-vertikale Projektion des Punktes bestimmen. — Ist a die horizontale und a′ die vertikale Projektion eines Punktes, und man dreht die zweit-vertikale Tafel so weit um die Axe Z, bis sie links von dieser mit der vertikalen Tafel zusammenfällt, so wird nach (§. 63, 4.) die zweit-vertikale Projektion des Punktes mit seiner vertikalen in der Senkrechten 'a b′ liegen müssen, die von a′ auf Z gezogen wird. Nach (§. 63, 3.) muss aber auch die zweit-vertikale Projektion des Punktes von der Axe Z so weit entfernt sein, als seine horizontale Ordinate ab angibt: trägt man daher ab von 'b auf die Verlängerung der Senkrechten a′ b′, so wird der hierdurch erhaltene Punkt a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes sein. — (Fig. 31.) Dreht man die zweit-vertikale Tafel so weit um Y, bis sie mit der horizontalen Tafel zusammenfällt, so wird (§. 63, 4.) die zweit-vertikale Projektion mit der horizontalen Projektion in der von a aus auf Y senkrecht gezogenen a b″ a″ liegen, und (nach §. 63, 3.) von Y so weit entfernt sein, als der Punkt selbst von der horizontalen Tafel entfernt ist. Trägt man daher auf die Verlängerung von a b″ von b″ aus die Gerade b″ a″ = b a′, so wird die zweit-vertikale Projektion "a des Punktes erhalten. Es folgt hieraus das Verfahren, aus zwei Projektionen eines Punktes die dritte zu bestimmen. (Fig. 30.) Zieht man nämlich, wenn die Tafeln, wie in dieser Figur angegeben wird, in einer Ebene liegen, von der horizontalen Projektion auf Y eine Senkrechte a b″, und beschreibt von O aus mit O b″ einen Bogen, so wird dieser die neue Lage der Y in b″ treffen. Von diesem Punkte b″ aus eine Senkrechte a″ b″ = a′ b auf Y gezogen, oder die Senkrechte a′ b′ so weit verlängert, bis b″ a″ getroffen wird, gibt in a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes. (Fig. 31.) Wäre die zweit-vertikale Tafel in die horizontale Tafel gelegt worden, so würde Z nach der rückwärtigen Verlängerung von X zu liegen kommen. Man müsste nun von 'a auf Z die Senkrechte a′ b′ ziehen, und von O aus mit O b′ einen Kreisbogen beschreiben, der die neue Lage der Z in b′ schneidet, von diesem Durchschnittspunkte in der horizontalen Tafel auf Z die Senkrechte b′ a″ = a b ziehen, oder a b″ so weit verlängern, bis b′ a″ getroffen wird, so wird man in dem hierdurch erhaltenen Punkte a″ die zweit-vertikale Projektion des Punktes erhalten. — (Fig. 30.) Wäre die zweit-vertikale und die horizontale Projektion, nämlich a und a″ gegeben, so könnte man die vertikale Projektion durch ein ähnliches Verfahren erhalten. Zieht man nämlich von der horizontalen Projektion aus auf X eine Senkrechte, so muss (§. 63, 4.) in dieser auch die vertikale Projektion des Punktes liegen; und so weit von der Axe X entfernt sein, als der Punkt von der horizontalen Tafel entfernt ist, also wird die vertikale Ordinate des Punktes = a″ b″ sein; diese also von b aus auf die genannte Senkrechte in der vertikalen Tafel getragen, gibt die vertikale Projektion a′ des Punktes. Verlängert man die von a″ auf Z gezogene Senkrechte, bis sie die Senkrechte a b trifft, so erhält man die vertikale Projektion a′ als Durchschnittspunkt beider Senkrechten. (Fig. 30.) Wäre endlich die zweit-vertikale und vertikale Projektion eines Punktes gegeben, so erhält man die horizontale Projektion a entweder dadurch, dass man von a′ aus auf X die Senkrechte a′ b zieht, und von b aus die Gerade 'b a″ auf a′ a trägt, oder indem man mit O b″ einen Bogen beschreibt, welcher dann die erste Lage der Axe Y in b″ treffen wird, von b″ auf Y in der horizontalen Tafel eine Senkrechte zieht, so wird in dem Durchschnittspunkte derselben mit der von a′ auf X gezogenen Senkrechten a′ b a″ die horizontale Projektion a des Punktes liegen. —

§. 68.

In dem vorigen §. wurde angenommen, dass sich der Punkt im ersten Quadranten befindet, und wurde überhaupt nicht Rücksicht auf die zweit-vertikale Tafel genommen. Wollte man auch diese berücksichtigen, so müsste man den ganzen Raum, in welchem sich ein darzustellender Punkt befinden könnte, nicht in vier, sondern in acht Theile getheilt denken, von welchen der erste von der vertikalen, horizontalen und zweit-vertikalen Tafel gebildet wird; der zweite von den Theilen der vertikalen und horizontalen Tafel, die links der der zweit-vertikalen Tafel liegen und von dieser selbst, der dritte von dem Theile der vertikalen Tafel, der links der zweit-vertikalen Tafel liegt, dann von dem Theile der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel, der links der zweit-vertikalen Tafel liegt, und von der rückwärtigen Verlängerung der letztern eingehüllt wird, u. s. f. Da aber die horizontale und vertikale Projektion eines Punktes immer hinreichend sind, den Punkt zu bestimmen, so brauchen wir auf die Lage des Punktes gegen die zweit-vertikale Tafel nicht Rücksicht nehmen, sondern können diese jedesmal, wenn es nothwendig ist angeben. (Fig. 32.) Ist a_2 die horizontale und a'_2 die vertikale Projektion eines Punktes, so liegt (§. 65.) der Punkt im zwei-

ten Quadranten, folglich wird bei Ausbreitung der Tafeln seine zweit-vertikale Projektion zwischen (X und Z) fallen, nach a''_2, und wird nach §. 67. erhalten. Zieht man nämlich von der horizontalen Projektion a_2 des Punktes eine Senkrechte auf Y, so trifft diese Senkrechte die rückwärtige Verlängerung der Y in b''_2, und in dieser Senkrechten würde (nach §. 63, 4.) die zweit-vertikale Projektion des Punktes liegen, wenn die Tafel (YZ) in der horizontalen Tafel liegen würde. Da aber die Tafel (YZ) um Z gedreht und in die vertikale Tafel gelegt wurde, so fällt die rückwärtige Verlängerung von Y mit X zusammen, und daher wird auch die Gerade $a''_2 b''_2$ nun auf X senkrecht zu stehen kommen, und in der Senkrechten $b''_2 a''_2$ liegt mithin die zweit-vertikale Projektion des Punktes. Letztere muss aber auch (§. 63. 4.) mit der vertikalen Projektion a'_2 in der Senkrechten $a'_2 b'_2$ liegen, und liegt daher in a''_2, dem Durchschnitte dieser beiden Senkrechten. Es gibt hier wieder die Gerade $a'_2 b'_2$ oder $a_2 b''_2$ die Entfernung des Punktes von der zweit-vertikalen Tafel an. Würde sich der Punkt links der zweit-vertikalen Tafel befinden, so würde seine horizontale Projektion sowohl, als seine vertikale Projektion zwischen (YZ) gefallen sein, also seine zweit-vertikal projicirende Linie die entgegengesetzte Richtung von der vorigen haben. (Fig. 33.) Auch bei der Lage des Punktes im dritten Quadranten fällt die zweit-vertikale Projektion rechts von (YZ), und zwar nach a''_1, und wird (genau nach §. 67.) erhalten, wenn man von der vertikalen Projektion a'_1 des Punktes auf die rückwärtige Verlängerung von Z eine Senkrechte $a_1 b_1$ zieht, und auf diese von b'_1 aus die Entfernung $a_1 b_1$ des Punktes von der vertikalen Tafel trägt. Ist endlich der Punkt im vierten Quadranten und rechts von (YZ), so fällt seine zweit-vertikale Projektion zwischen (YY). Da sie (§. 63.) in der Senkrechten $a'_2 b'_2$ liegen, und von der rückwärtigen Verlängerung der Axe Z (die nach Y fällt) so weit entfernt sein muss, als $a_2 b_2$ angibt, so darf man nur von b'_2 aus die Gerade $b'_2 a''_2 = a_2 b_2$ machen, und es wird in a''_2 die zweit-vertikale Projektion des Punktes erhalten werden. — Für einen Punkt, der links von (YZ) liegt, kömmt keine Aenderung in Bezug auf seine zweit-vertikale Projektion vor, aber seine horizontale und vertikale Projektion werden links von (YZ) zu liegen kommen, also die Abscisse des Punktes, welche (nach 61.) der horizontalen und vertikalen Tafel gemeinschaftlich ist, die entgegengesetzte Richtung von der eines rechts von (YZ) liegenden Punktes haben.

§. 69.

Es soll nun kurz wiederholt werden, wie man die Lage eines Punktes sich wieder vorstellen könnte. Deshalb seien

1. die Projektionen, und zwar horizontale und vertikale Projektion gegeben; so denke man sich die horizontale Tafel wieder um X gedreht, bis sie senkrecht auf der vertikalen Tafel ist. Ist nun die horizontale Projektion des Punktes in der horizontalen Tafel, wie a_1 Fig. 32 und a_2 Fig. 33, so denke man sich von derselben aus eine Senkrechte gezogen, und auf dieser oberhalb der horizontalen Tafel die Länge der vertikalen Ordinate aufgetragen, wenn letztere in der vertikalen Tafel liegt (Fig. 32.); liegt aber die vertikale Ordinate des Punktes in der horizontalen Tafel, so muss man die von der horizontalen Projektion des Punktes auf die horizontale Tafel gezogene Senkrechte unterhalb der horizontalen Tafel verlängern, und auf diese Verlängerung die vertikale Ordinate auftragen. Befindet sich aber die horizontale Projektion des Punktes in der vertikalen Tafel, so hat man auf diese die Senkrechte zu ziehen, und die vertikale Ordinate auf letztere zu tragen, und zwar vor derselben, wenn die vertikale Projektion des Punktes in dieser Tafel liegt, hingegen rückwärts in der Richtung der rückwärtigen Verlängerung dieser Tafel, wenn die vertikale Projektion des Punktes in der horizontalen Tafel liegt, oder seine vertikale Ordinate negativ ist. —

2. Sind die Coordinaten des Punktes gegeben, und man soll die Lage des Punktes durch dieselben bestimmen; so trage man die Abscisse vom Anfangspunkte O aus auf X, wenn sie positiv ist, auf die rückwärtige Verlängerung von X, wenn sie negativ ist. Vom Endpunkte der Abscisse aus ziehe man eine Senkrechte auf X, die in der vertikalen Tafel oder ihrer Verlängerung liegt, je nachdem die vertikale Ordinate positiv oder negativ ist; und mache diese Senkrechte gleich der vertikalen Ordinate, so erhält man die vertikale Projektion des Punktes. Ebenso ziehe man auch auf X eine Senkrechte, die in der horizontalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung liegt, je nachdem die horizontale Ordinate positiv oder negativ ist, und mache diese Senkrechte gleich der horizontalen Ordinate; so erhält man die horizontale Projektion des Punktes, und kann also aus diesen beiden Projektionen die dritte (§. 67.), und (nach 1 dieses §.) den Punkt im Raume angeben. —

§. 70.

Liegt ein Punkt in einer der Projektionstafeln selbst, so muss jede der übrigen Projektionen in den entsprechenden Axen liegen, welche die Durchschnitte dieser Tafel mit den andern Projektionstafeln sind. (Fig. 34.) Ist z. B. a, ein in der horizontalen Tafel liegender Punkt, so muss seine vertikale Projektion (§. 63.) in der Senkrechten $a_1 a_1'$ liegen, und (§. 63.) von X so weit entfernt sein, als die vertikale Ordinate angibt. Da aber letztere für dieses Beispiel Null ist, so muss a'_1 selbst die vertikale Projektion sein. Ist a'_2 die vertikale Projektion eines in der vertikalen Tafel liegenden Punktes, also a'_2 der gegebene Punkt, so muss (§. 63.) seine zweit-vertikale Projection in der Senkrechten $a'_2 a''_2$ liegen, und a''_2, nämlich der Durchschnitt dieser Senkrechten mit Z sein, weil der Punkt von der vertikalen Tafel nicht entfernt, also die der horizontalen und zweit-vertikalen Tafel gemeinschaftliche horizontale Ordinate Null sein muss. Aus demselben Grunde wird a_2 die horizontale Projektion des Punktes a'_2 sein. Ebenso ist auch die vertikale Projektion des in der zweit-vertikalen Tafel liegenden Punktes a''_3 in a'_3 und seine horizontale Projektion in a_3. —

Will man daher, dass ein Punkt in einer der Tafeln liege, so hat man diese letztere so weit parallel mit sich selbst zu verschieben, bis sie durch den Punkt geht, und daher ihre Durchschnitte mit den beiden übrigen Tafeln so weit parallel mit sich selbst verrücken, bis sie durch die übrigen Projektionen des Punktes gehen. (Fig. 30.) Soll z. B. die horizontale Tafel durch den gegebenen Punkt gehen, so hat man nur die Axe X parallel zu ihrer ersten Lage zu verschieben, bis sie die vertikale Projektion a des Punktes enthält, so wird bei dieser neuen Lage der horizontalen Tafel und dem neuen Anfangspunkte O' der Punkt a in dieser Tafel enthalten sein. —

§. 71.

Bisher wurde von der Darstellung eines Punktes gesprochen, welche zuerst durch schiefe und dann durch rechtwinklige Projektionen geschah. Wenn wir von nun an von Projektion eines Punktes auf einer Ebene sprechen, so verstehen wir darunter immer den Fuss der vom Punkte auf die Ebene gezogenen Senkrechten. — (Fig. 35.) Ist nun eine Gerade im Raume gegeben, die dargestellt werden soll, so denke man sich durch dieselbe eine Ebene gelegt, die senkrecht auf der Projektionsebene steht, und bezeichne den Durchschnitt dieser Ebene mit der Projektionstafel. Diesen Durchschnitt nennt man Projektion der Geraden, und jene Ebene, die senkrecht auf der Projektionstafel steht, wird projicirende Ebene genannt, und zwar horizontal-, vertikal-, oder zweit-vertikal-projicirende Ebene, je nachdem man die Projection der Geraden auf der horizontalen Tafel, oder die horizontale Projektion, oder die Projektion der Geraden auf der vertikalen Tafel, nämlich die vertikale Projektion derselben, oder ihre Projektion auf der zweit-vertikalen Tafel, nämlich die zweit-vertikale Projektion der Geraden, bestimmt hat. — Hier ist ac die horizontale Projektion, a'c' die vertikale Projektion einer Geraden, und zugleich ist die zweit-vertikale Projektion ersichtlich für den Fall sowohl, in welchem die zweit-vertikale Tafel in der vertikalen Tafel, als auch für den Fall, in welchem die zweit-vertikale Tafel in der horizontalen Tafel niedergelegt ist. — Um die Gerade im Raume wieder angeben zu können, sind zwei Projektionen derselben hinreichend und nothwendig, wenn nicht einzelne Punkte der Geraden zu ihrer Darstellung benützt werden sollen. Ist z. B. die horizontale und vertikale Projektion einer Geraden bekannt, und man denkt sich durch die horizontale Projektion eine Ebene senkrecht auf die horizontale Tafel gelegt, so muss in dieser die Gerade enthalten sein. Letztere muss aber auch in der Ebene enthalten sein, die man durch die vertikale Projektion senkrecht auf die vertikale Tafel legt, und muss daher im Durchschnitte dieser und der vorigen Ebene enthalten sein. Auf gleiche Weise könnte man aus der vertikalen und zweit-vertikalen Projektion einer Geraden, oder aus ihrer horizontalen und zweit-vertikalen Projektion die Lage derselben im Raume bestimmen. —

§. 72.

(Fig. 35.) Es sei nun auf einer Geraden ein Punkt angegeben, der projicirt werden soll; so suche man zuerst eine Projektion der Geraden, z. B. ihre horizontale Projektion ac, indem man durch diese Gerade ihre projicirende Ebene legt. Zieht man nun die horizontal projicirende Linie des Punktes, so muss dieselbe nach §. 46. in der horizontal projicirenden Ebene der Geraden liegen; folglich liegt die horizontale Projektion des Punktes in der horizontalen Projektion der Geraden. Aus gleichem Grunde muss die vertikale Projektion des Punktes in der vertikalen Projektion und die zweit-vertikale Projektion des Punktes in der zweit-vertikalen Projektion der Geraden liegen, so dass man den Satz aussprechen kann: Die Projektionen eines auf einer Geraden sich befinden-

den Punktes liegen in den entsprechenden Projektionen der Geraden. (Fig. 35.) Sind die Projektionen eines Punktes auf den Projektionen einer Geraden angegeben, wie a, a'_1, a'', und man denkt sich die projicirenden Ebenen der Geraden und die projicirenden Linien des Punktes gezogen, so müssen letztere (nach §. 46.) sich in den projicirenden Ebenen der Geraden befinden, und mithin der Punkt im Raume auf der Geraden sein, so dass also auch der umgekehrte Satz wahr ist:

Liegen die Projektionen eines Punktes auf den Projektionen einer Geraden, so muss der Punkt auf der Geraden sich befinden.

§. 73.

(Fig. 36.) Aus den im vorigen §. entwikelten Sätzen und dem §. 63. kann man folgende Folgerungen ziehen:

1. Ist eine Gerade durch ihre Projektionen $a'_1 b'_1$, $a''_1 b''_1$, $a_1 b_1$ gegeben, und man will einen Punkt durch seine Projektionen bestimmen, der auf der Geraden im Raume liegen soll, so nehme man eine seiner Projektionen, z. B. seine vertikale Projektion in a'_1 an. Zieht man nun die Senkrechten $a'_1 a_1$, $a_1 a''_1$ auf die Axen X und Z, so muss in jener die horizontale und in dieser die zweit-vertikale Projektion des Punktes (§. 63.) liegen; mithin wird (nach vor. §.) in a_1, dem Durchschnitte von $a_1 a'_1$ mit $a_1 b_1$ die horizontale Projektion und in a''_1, dem Durchschnitte der Senkrechten $a'_1 a''_1$ mit $a''_1 b''_1$ die zweitvertikale Projektion des Punktes liegen.
2. Soll eine begränzte Gerade angegeben werden, so darf man nur die Projektonen der Geraden begränzen, und es werden dann die Endpunkte der Projektionen auch die Projektionen der Endpunkte im Raume sein. —
3. Theilt man die Gerade in gleiche Theile, so werden die Projektionen der Geraden durch die Projektionen ihrer Theilpunkte in eben so viele unter sich gleiche Theile getheilt. Denn denkt man sich die Theilpunkte projicirt, so werden ihre Projektionen in den Projektionen der Geraden (nach vor. §.) liegen. Zieht man nun in einer der projicirenden Ebenen, z. B. in der horizontal projicirenden Ebene vom Endpunkte der horizontalen Projektion aus zur Geraden eine Parallele gezogen, so bilden die Theile der projicirenden Linien, welche zwischen dieser Parallelen und der Projektion der Geraden liegen, mit den Theilen dieser letzteren Linie ähnliche Dreiecke, aus welchen sich ergibt, dass die Theile der Geraden sich verhalten, wie die entsprechenden Theile ihrer Projektionen. Ist also die Gerade in gleiche Theile getheilt, und man projicirt ihre Theilungspunkte, so werden die Projektionen der letzteren auch die Projektionen der Geraden in gleiche Theile theilen. —
4. Steht eine Gerade senkrecht auf einer Tafel, so wird ihre Projektion in dieser Tafel ihr Fusspunkt sein, in welchen auch die Projektionen aller Punkte fallen müssen, die auf dieser Geraden liegen. —

§. 74.

(Fig. 36.) Betrachten wir nun noch einige besondere Lagen der Geraden im Raume. Es sei $a_1 b_1$ die horizontale, $a'_1 b'_1$ die vertikale, $a''_1 b''_1$ die zweit-vertikale Projektion einer begränzten Geraden; von diesen sei $a_1 b_1$ parallel zu Axe X, und $a''_1 b''_1$ parallel zur Axe Z. Da nun die horizontale Ordinate des ersten Punktes gleich der horizontalen Ordinate des zweiten Punktes, gleich der horizontalen Ordinate irgend eines Punktes der Geraden ist, und (nach §. 63, 3.) die horizontale Ordinate eines Punktes seine Entfernung von der vertikalen Tafel angibt; so müssen alle Punkte dieser Geraden gleich weit von der vertikalen Tafel entfernt sein, und mithin ist diese Gerade mit der vertikalen Tafel parallel. Wir hätten dasselbe auch aus der Entfernung $a''_1 b''_1$ der Punkte von der Axe Z entnehmen können, denn diese ist gleich den horizontalen Ordinaten der Punkte der Geraden. Es folgt also:

Ist die horizontale Projektion einer Geraden parallel zur Axe X, so ist die zweit-vertikale Projektion der Geraden parallel mit Z, die Gerade im Raume aber parallel zur vertikalen Tafel. (Fig. 36.) Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass die Gerade, deren vertikale Projektion $(a'_2 b'_2)$ parallel mit X ist, parallel zur horizontalen Tafel, ihre zweitvertikale Projektion $(a''_2 b''_2)$ parallel mit Y sein muss; dass ferner die Gerade, deren vertikale Projektion $(a'_1 b'_1)$ parallel mit Z und deren horizontale Projektion $(c_1 b_1)$ parallel mit Y ist, zur zweit-vertikalen Tafel parallel sein wird. (Fig. 38.) Ist eine Gerade parallel zur horizontalen Tafel, so muss auch ihre vertikale Projektion parallel zur Axe X sein, weil die vertikalen Ordinaten aller ihrer Punkte (§. 63.) gleich den horizontal projicirenden Linien dieser Punkte, also unter sich in

diesem Falle gleich sein müssen. Ebenso muss die horizontale Projektion einer mit der vertikalen Tafel parallelen Geraden, zur Axe X parallel, und mithin auch die zweit-vertikale Projektion mit Z parallel sein. — Wenn endlich die Gerade parallel zur zweit-vertikalen Tafel ist; so muss ihre horizontale Projektion parallel zur Axe Y, ihre vertikale Projektion aber zur Axe Z parallel sein. — (Fig. 38.) Die Projektionen ($a'_1 b'_1$, $a_1 b_1$) sowohl, als auch die ($^z, q^z, e$) und ($a_2 b_2$) gehören also zu einer Geraden, die parallel zur zweit-vertikalen Tafel ist.

§. 75.

(Fig. 37.) Steht eine Gerade senkrecht auf einer der Tafeln, z. B. senkrecht auf der horizontalen Tafel, so gibt der Fuss der Geraden ihre horizontale Projektion in $a_1 b_1$ an; ihre vertikale Projektion $a'_1 b'_1$ sowohl, als auch ihre zweit-vertikale Projektion $a''_1 b''_1$ muss (§. 74.) parallel mit Z sein, weil die Gerade parallel mit jeder dieser beiden Tafeln ist. — Umgekehrt wird uns auch aus den Projektionen $a_1 b_1$, $a'_1 b'_1$, $a''_1 b''_1$ ersichtlich sein, dass die Gerade senkrecht auf der horizontalen Tafel ist; denn dieselbe muss nach vor. §. parallel mit der vertikalen Tafel sowohl, als auch mit der zweit-vertikalen Tafel sein, also senkrecht auf der horizontalen Tafel, was übrigens schon aus der horizontalen und vertikalen Projektion allein hervorgeht. — In derselben Figur ist $a'_2 b'_2$ die vertikale, $a_2 b_2$ die horizontale und $a''_2 b''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden, die senkrecht auf der vertikalen Tafel steht. — Ist eine Gerade parallel mit zwei Tafeln, so muss sie senkrecht auf der dritten, also auch ihre Projektionen in den Tafeln, die ihr parallel sind, mit dem Durchschnitte dieser beiden Tafeln parallel. —

§. 76.

Sind zwei Gerade im Raume gegeben, so können dieselben entweder in einer Ebene liegen, oder nicht. Im ersten Falle, in welchem man durch beide eine Ebene legen kann, sind entweder diese Geraden unter sich parallel, oder sie schneiden sich, wenn sie genugsam verlängert werden. — Angenommen, es seien die Geraden parallel unter sich, und man sucht ihre Projektionen, so muss man zu diesem Zwecke durch jede derselben die projicirenden Ebenen legen, und es seien (Fig. 39.) die horizontalen Projektionen der Geraden $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$, die vertikalen Projektionen derselben seien $a'_1 b'_1$, $a'_2 b'_2$. Betrachtet man die beiden horizontal projicirenden Ebenen der Geraden, so liegen in der einen die horizontal projicirenden Linien der Endpunkte der einen Geraden (§. 70.) und in der andern liegen die horizontal projicirenden Linien der anderen Geraden. Die horizontal projicirenden Linien aller Punkte sind aber unter sich parallel, und da hier die Geraden auch unter sich parallel angenommen wurden, so muss (§. 36.) die horizontal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur horizontal projicirenden Ebene der andern Geraden sein, mithin ist (nach §. 33.) auch $a_1 b_1$ parallel mit $a_2 b_2$. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dass auch $a'_1 b'_1 \neq a'_2 b'_2$ und endlich $a''_1 b''_1 \neq a''_2 b''_2$ ist. Sind also zwei Gerade im Raume parallel, so müssen ihre horizontalen Projektionen unter sich parallel sein, ebenso auch ihre vertikalen Projektionen und ihre Projektionen in der zweit-vertikalen Tafel. Liegen beide Gerade so, dass die durch sie gelegte Ebene eine projicirende Ebene wird, so fallen die Projektionen einer Tafel in eine einzige Gerade zusammen, die in den andern müssen aber parallel sein. Sind beide Gerade in einer Ebene, die senkrecht auf einer Axe, z. B. auf X ist, so werden die horizontalen Projektionen sowohl, als auch die vertikalen Projektionen in einer einzigen Geraden liegen, die zweit-vertikalen Projektionen müssen aber unter sich parallel sein. Diese Fälle machen aber durchaus keine Ausnahme. —

Ist nun $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$, $a'_1 b'_1 \neq a'_2 b'_2$, und mithin auch $a''_1 b''_1 \neq a''_2 b''_2$, und man denkt sich die projicirenden Ebenen dieser Geraden gezogen, so muss, weil $a_1 b_1 \neq a_2 b_2$, ferner weil die horizontal projicirende Linie von a_1, parallel mit der horizontal projicirenden Linie von a_2 (§. 27.) ist, auch die horizontal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur horizontal projicirenden Ebene der andern Geraden sein. Ebenso kann gezeigt werden, dass die vertikal projicirende Ebene der einen Geraden parallel zur vertikal projicirenden Ebene der andern Geraden sein muss. Da also die zwei projicirenden Ebenen der einen Geraden einzeln parallel zu den beiden projicirenden Ebenen der andern Geraden sind, so muss (§. 38.) die Communsektion der beiden projicirenden Ebenen der einen Geraden parallel sein zur Communsektion der beiden projicirenden Ebenen der andern Geraden, oder die beiden Geraden, deren horizontale Projektionen unter sich parallel sind, und deren vertikale Projektionen auch parallel unter sich sind, müssen parallel sein. — Sind also die horizontalen Projektionen zweier Geraden sowohl, als auch ihre vertikalen Projektionen unter sich parallel, so

sind die Geraden im Raume ebenfalls parallel zu einander.

§. 77.

(Fig. 40.) Sind die Projektionen zweier Geraden gegeben, und zwar $a_1 b_1$ die horizontale Projektion der einen, $a'_1 b'_1$ ihre vertikale und $a''_1 b''_1$ ihre zweit-vertikale Projektion, $a_2 b_2$ die horizontale Projektion, $a'_2 b'_2$ die vertikale und $a''_2 b''_2$ die zweit-vertikale Projektion der andern Geraden, ferner p die horizontale, p′ die vertikale und p″ die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, der sich auf beiden Geraden befindet, so müssen sich die Geraden schneiden; denn da (nach §. 63.) p, p′, p″ die Projektionen eines einzigen Punktes bedeuten, und diese Projektionen sich auf den Projektionen beider Geraden befinden, so muss der Punkt selbst (§. 72.) sich auf beiden Geraden befinden, oder beide Gerade schneiden sich. Es folgt also hieraus:

Schneiden sich die horizontalen Projektionen zweier Geraden, so wie auch ihre vertikalen Projektionen so, dass die Verbindungsgerade ihrer Durchschnittspunkte senkrecht auf der X steht; so müssen sich die Geraden im Raume schneiden.

Dasselbe würde auch statt finden, wenn sich die horizontalen Projektionen sowohl, als auch die zweit-vertikalen Projektionen schneiden, und zwar so, dass die Durchschnittspunkte die Projektionen eines Punktes sind, also die Bedingungen des §. 63. erfüllen. Derselbe Satz findet auch umgekehrt statt. Schneiden sich nämlich die Geraden im Raume, so müssen die Projektionen des Durchschnittspunktes sich auf den entsprechenden Projektionen der Geraden (§. 72.) befinden, also die Projektionen einer und derselben Tafel sich entweder schneiden, oder in einer Geraden liegen. Steht nämlich die Ebene, welche durch beide Gerade gelegt werden kann, senkrecht auf einer der Projektionstafeln, so ist diese Ebene projicirende Ebene der Geraden, und es fallen dann beide Projektionen der Geraden auf dieser Tafel in eine einzige Gerade zusammen. Liegen beide Gerade so, dass die durch dieselben gelegte Ebene senkrecht auf einer Axe steht, z. B. auf der Axe X, so fallen sowohl vertikale als horizonlae Projektionen in einer einzigen Geraden, und es müssen sich dann die zweit-vertikalen Projektionen so schneiden, dass ihr Durchschnittpunkt mit der vertikalen Projektion des Durchschnittspunktes beider Geraden in einer auf Z senkrechten Geraden liegt. Es ist also zur Genüge gezeigt, wie man erkennen kann, ob durch zwei Gerade im Raume eine einzige Ebene gelegt werden kann, und ob diese Geraden parallel sind, oder sich schneiden. — Erfüllen die Projektionen zweier Geraden weder die im §. 76. festgesetzten noch die in diesem Parapraphe ausgesprochenen Bedingungen, so liegen dieselben in verschiedenen Ebenen, oder man kann keine Ebene finden, in welcher beide Gerade zugleich liegen.

§. 78.

Der im §. 72. erläuterte Satz kann auch angewendet werden, um jede Figur, die von Geraden begränzt wird, zu projiciren. So zeigt Fig. 41. die Projektionen eines Dreieckes, dessen Lage im Raume leicht durch die Projektionen $a_1 a'_1 a''_1$, $a_2 a'_2 a''_2$, $a_3 a'_3 a''_3$ seiner Scheitel angegeben werden kann, so dass also dieses Dreieck durch seine horizontale Projektion $a_1 a_2 a_3$ und seine vertikale Projektion $a'_1 a'_2 a'_3$, oder durch seine horizontale Projektion $a_1 a_2 a_3$ und seine zweit-vertikale Projektion $a''_1 a''_1 a''_3$ völlig bestimmt ist. — In Fig. 42. ist $a_1 a_2 a_3 a_4$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ die vertikale und $a''_1 a''_2 a''_3 a''_4$ die zweit-vertikale Projektion eines Viereckes, dessen Lage ebenfalls leicht durch die Projektionen seiner Scheitel angegeben werden kann. Zugleich bemerkt man, dass jede dieser Projektionen ein Parallelogramm ist, folglich müssen je zwei gegenüberstehende Seiten des Viereckes im Raume (§. 76.) unter sich parallel sein, und das projicirte Viereck ist mithin ein Parallelogramm. Ferner ersieht man hieraus, dass wenn zwei begränzte Gerade im Raume parallel und gleich sind, auch ihre zusammengehörigen Projektionen es sein müssen. — Auf dieselbe Weise könnte jede geradlinig begränzte Figur projicirt, und durch ihre Projektionen die Lage und Grösse derselben im Raume wieder angegeben werden. —

§. 79.

Nachdem die Darstellung eines Punktes, einer Geraden und einer von Geraden begränzten Figur gezeigt wurde, soll auf die Darstellung einer Ebene übergegangen werden. Dass eine Ebene durch die Projektionen dreier auf ihr liegender Punkte der Lage nach bestimmt ist, lässt keinen Zweifel übrig, weil (§. 8.) durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, die Lage der Ebene vollkommen bestimmt ist. Geht man aber auf die Erzeugung einer Ebene zurück, und benützt diese für ihre Darstellung, so wird durch die Projektionen zweier Geraden die sich in der Ebene befinden, letztere der Lage nach bestimmt sein. Man wählt als solche Gerade die Communsektionen der

Ebene mit den Projektionstafeln, weil die Projektionen jeder dieser Geraden sehr einfach werden, und nur eine ihrer Projektionen zur Bestimmung ihrer Lage nothwendig ist. Die Communsektion einer Ebene mit einer der Projektionstafeln wird Spur oder Grundschnitt genannt, und zwar nennt man die Communsektion einer Ebene mit der horizontalen Tafel ihre horizontale Spur, die Communsektion einer Ebene mit der vertikalen Tafel ihre vertikale Spur, endlich die Communsektion einer Ebene mit der zweit-vertikalen Tafel die zweit-vertikale Spur dieser Ebene. Man nennt auch Spur einer Geraden den Durchgangspunkt der letzteren mit einer der Projektionstafeln, und zwar ihren Durchgangspunkt mit der horizontalen Tafel die horizontale Spur, ihren Durchgangspunkt mit der vertikalen Tafel die vertikale Spur, und ihren Durchgangspunkt mit der zweit-vertikalen Tafel die zweit-vertikale Spur derselben.

§. 80.

Denkt man sich nun eine Ebene im Raume gegeben, so wird ihre Lage nicht verändert, wenn man sich dieselbe so weit man will, verlängert denkt. Verlängert man daher diese Ebene, so wird sie entweder jede der Tafeln treffen, oder nicht. Trifft sie eine der Tafeln nicht, so ist sie (§. 25.) mit derselben parallel; ist dieselbe aber mit keiner der Tafeln parallel, so werden letztere von dieser Ebene (§. 13.) nach einer Geraden geschnitten. Eine jede der Axen wird (§. 5.) von einer Ebene in einem Punkte getroffen, wenn die Ebene nicht parallel zu denselben ist. — (Fig. 43.) Ist nun eine Ebene nicht parallel zu einer der Axen, also auch mit keiner der Tafeln, so muss sie die Axe der X in einem Punkte (A) treffen, die Axe der Y ebenfalls in einem Punkte (A″) und die Axe der Z in einem Punkte ('A). Da nun der Punkt A, in welchem die Axe X von der Ebene getroffen wird, sowohl der horizontalen, als auch der vertikalen Tafel angehört, so muss derselbe auch sowohl der horizontalen, als auch der vertikalen Spur der Ebene zugleich angehören, woraus also folgt, dass horizontale und vertikale Spur einer Ebene, die mit X nicht parallel ist, in einem Punkte der Axe X sich schneiden müssen. Es wird auch Z von der Ebene in einem Punkte "A getroffen, weshalb also die vertikale und zweit-vertikale Spur der Ebene ebenfalls in einem Punkte von Z zusammentreffen müssen, und ebenso müssen sich die horizontale und zweit-vertikale Spur der Ebene in einem Punkte der Axe Y treffen, wenn die Ebene nicht mit Y parallel ist.

Wird die Axe X von der horizontalen Spur nicht getroffen, so ist letztere (§. 11.) mit X parallel, und mithin (§. 29.) auch X mit der Ebene parallel, weshalb also auch die vertikale Spur (als eine in der Ebene liegende Gerade) die Axe X nicht treffen kann, also mit ihr (§. 11.) parallel sein muss. Da aber die horizontale Spur sowohl, als auch die vertikale in diesem Falle mit X parallel ist, so ist (§. 28.) auch die horizontale Spur mit der vertikalen Spur parallel. Aus diesem geht also hervor:

dass wenn die horizontale oder vertikale Spur parallel zur Axe X ist, beide sowohl unter sich parallel, als auch parallel zur Axe X sein müssen. Ebenso muss auch die vertikale mit der zweit-vertikalen Spur parallel sein, wenn nur eine derselben parallel zur Axe Z ist, und endlich muss die horizontale mit der zweit-vertikalen Spur parallel sein, wenn nur eine derselben parallel zur Axe Y ist. —

§. 81.

Sind nun zwei Spuren, und zwar horizontale und vertikale Spur einer Ebene gegeben, so kann man sich durch dieselben wieder die Lage der Ebene, zu welcher sie gehören, vorstellen. Schneiden sich nämlich erstens die beiden Spuren, was nach vor. §. in einem Punkte der X statt finden muss, so kann man die eine derselben, z. B. die horizontale Spur als Generatrix, und die andere als Direktrix der Ebene betrachten. Bewegt sich nun die horizontale Spur parallel zu ihrer ersten Lage, also auch (§. 29.) parallel mit der horizontalen Tafel bleibend fort, und trifft bei ihrer Bewegung stets die vertikale Spur, so wird (§. 5.) dieselbe Ebene erzeugt, welche durch ihre Spuren dargestellt ist, und es ist also diese Erzeugung ein Mittel, die Ebene im Raume vorstellen zu können. Denkt man sich aber durch beide Spuren eine Ebene gelegt, so wird letztere auch die durch ihre Spuren dargestellte Ebene sein, wodurch man sich also ebenfalls die Lage der Ebene im Raume versinnlichen kann. (Fig. 43.) Es sei E die horizontale, 'E die vertikale und "E die zweit-vertikale Spur einer Ebene, bringt man die Tafel in ihre erste Lage, und die Gerade E bewegt sich parallel mit sich selbst (also auch parallel mit der horizontalen Tafel) an 'E oder an "E fort, so wird der geometrische Ort dieser Erzeugenden die Ebene sein. Dieselbe Ebene wird erhalten, wenn sich 'E parallel zu ihrer ersten Lage

(also parallel mit der vertikalen Tafel) fortbewegt, und dabei stets E oder "E trifft. Endlich ist die Ebene, die man durch E und 'E oder durch 'E und "E etc. etc. legen kann dieselbe, wie die vorhin erzeugte. —

(Fig. 46.) Sind zweitens beide Spuren parallel mit X, so kann man sich auch wieder auf zweierlei Weise die Lage der Ebene versinnlichen, wenn man die horizontale und vertikale Tafel in ihre erste Stellung (rechtwinklig auf einander) bringt. Legt man nämlich durch diese beiden Spuren (T und 'T) eine Ebene, so ist diese die durch T und 'T vorgestellte; oder lässt man eine beliebige Gerade so fortbewegen, dass sie stets diese beiden Spuren trifft, so wird der durch jene Gerade beschriebene geometrische Ort die Ebene sein, wodurch also ihre Lage im Raume versinnlicht werden kann.

Aus dem, was in diesem und dem vorigen §. erläutert wurde, folgt also,

dass eine Ebene durch zwei ihrer Spuren völlig bestimmt ist, und dass diese Spuren entweder in einem einzigen Punkte der Projektionsaxe (also die horizontale und vertikale Spur in einem Punkte der Axe X) zusammentreffen, oder unter sich parallel sein müssen. —

§. 82.

Da durch zwei Spuren einer Ebene die Lage der letzteren völlig bestimmt ist, so wird die dritte aus den beiden andern angegeben werden können. (Fig. 45.) Ist also E die horizontale und E' die vertikale Spur einer Ebene gegeben, so sind zur Auffindung der zweit-vertikalen Spur zwei Punkte nothwendig, die sowohl in der Ebene, als auch in der zweit-vertikalen Tafel liegen. Verlängert man aber 'E bis zur Axe Z und E bis zur Axe Y, so wird 'A sowohl, als auch "A die verlangten Bedingungen erfüllen, und mithin werden diese beiden Punkte 'A und "A der zweit-vertikalen Spur angehören. Bringt man also die zweit-vertikale Tafel in die vertikale Tafel, so bleibt 'A liegen, während "A einen Kreisbogen beschreibt vom Halbmesser "A O, dessen Mittelpunkt O ist, und nach "A der neuen Lage von Y (Verlängerung der Axe X) zu liegen kömmt. Verbindet man nun 'A mit "A durch eine Gerade, so wird letztere die zweit-vertikale Spur "E der Ebene sein. Ein ähnliches Verfahren würde man einschlagen, wenn aus der vertikalen und zweit-vertikalen Spur die horizontale, oder aus der horizontalen und zweit-vertikalen die vertikale Spur bestimmt werden sollte. (Fig. 44.) Trifft die horizontale Spur die Axe Y, die vertikale Spur aber nicht die Axe Z, so muss (§. 80.) die zweit-vertikale Spur parallel mit Z sein. Ist also "A der Punkt, in welchem Y von der horizontalen Spur T getroffen wird, so bringe man diesen Punkt, wenn die Tafeln auf einer Ebene ausgebreitet sind, nach "A der Verlängerung von X, indem man von O aus mit O"A einen Kreisbogen beschreibt, der sodann die neue Lage von Y in "A trifft. Zieht man nun durch "A die Gerade "T parallel mit Z, so wird diese Gerade die gesuchte zweit-vertikale Spur der Ebene sein. — (Fig. 45.) Trifft die horizontale Spur die Axe Y nicht, so ziehe man durch den Punkt 'A, in welchem Z von der vertikalen Spur 'T getroffen wird, die Gerade "T parallel mit X oder der neuen Lage Y, so wird hierdurch die zweit-vertikale Spur der Ebene erhalten. Trifft endlich weder die horizontale Spur die Axe Y, noch die vertikale Spur die Axe Z, so ist (§. 36.) die Ebene mit der zweit-vertikalen Tafel parallel, folglich auch keine zweit-vertikale Spur vorhanden. —

Anmerk. Es wurde hier nicht darauf Rücksicht genommen, dass die Axe Z von der vertikalen Spur auch unterhalb der X getroffen werden kann. Da nun durch diesen Punkt die zweit-vertikale Spur gehen muss, so wird ein Theil derselben in der horizontalen Tafel sichtbar sein. Würde die Axe Y von der horizontalen Spur aberhalb X getroffen, so würde dieser Punkt auch rechts von Z auf die Axe X zu liegen kommen, sobald man die zweit-vertikale Tafel um Z dreht, und links von Z in die vertikale Tafel legt. In Fig. 49. trifft die vertikale Spur S'_2 einer Ebene die Axe Z in $'A_2$, die Axe Y aber in $"A_2$, wobei aber $"A_2$ nach $"A_2$ der Axe X zu liegen kömmt, und mithin wird $'A_2"A_2$ oder $"S_2$ die zweit-vertikale Spur dieser Ebene sein, deren horizontale Spur in S_2, und deren vertikale Spur in $'S_2$ ist. —

§. 83.

(Fig. 44.) Ist T die horizontale Spur einer Ebene, 'T ihre vertikale Spur, und ist letztere senkrecht auf X, so muss (§. 45.) die Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel sein. Die Ebene (T A T"), deren vertikale Spur senkrecht auf X, also auch (§. 46.) senkrecht auf der horizontalen Tafel ist, wird mithin senkrecht auf der horizontalen Tafel sein. Ist umgekehrt eine Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel, so muss (§. 48.) ihre vertikale Spur senkrecht auf der Axe X oder auf der horizontalen Tafel sein. (Fig. 45.) Hieraus geht mithin auch hervor, dass wenn die horizontale Spur T einer Ebene T A 'T senkrecht auf der Axe X, also (§. 46.) senkrecht auf der vertikalen Tafel

steht, diese Ebene selbst senkrecht auf der vertikalen Tafel sein muss, und ist eine Ebene senkrecht auf der vertikalen Tafel, so muss ihre horizontale Spur senkrecht auf X sein. Ist daher eine Ebene senkrecht auf beiden Tafeln, so müssen auch beide Spuren senkrecht auf X sein und umgekehrt. Derselbe Satz gilt auch für die zweit-vertikale Tafel, und mithin ist (Fig. 46.) durch die Spuren T 'T eine Ebene dargestellt, die senkrecht auf der zweit-vertikalen Tafel steht. — (Fig. 47.) 'E 'A "E stellt eine Ebene dar, die parallel zur horizontalen Tafel ist, und die Geraden T, "T stellen eine Ebene dar, die parallel zur vertikalen Tafel, also senkrecht auf der horizontalen und zweit-vertikalen ist. —

Anmerk. Steht eine Ebene senkrecht auf einer, z. B. senkrecht auf der horizontalen Tafel, so fallen die horizontalen Projektionen aller geometrischen Grössen in die horizontale Spur der Ebene, weil in diesem Falle die Ebene für die in ihr enthaltenen Grössen horizontal-projicirende Ebene ist. —

§. 84.

(Fig. 48.) Es sei eine Ebene gegeben, auf welcher eine Gerade senkrecht steht, man soll die Lage der Projektionen der Geraden gegen die Spuren der Ebene suchen. Denkt man sich zu diesem Ende die Ebene bis zur horizontalen Tafel verlängert, so dass ihre horizontale Spur E erhalten wird, und projicirt die Gerade, so wird ihre horizontal projicirende Ebene senkrecht auf der gegebenen Ebene stehen (§. 45.), weil sie eine Gerade enthält, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht. Da nun die horizontale Tafel und die gegebene Ebene senkrecht auf dieser projicirenden Ebene stehen, so muss (§. 48.) die horizontale Spur der Ebene, nämlich E, senkrecht auf der horizontal projicirenden Ebene der Geraden stehen, mithin diese horizontale Spur auch senkrecht sein auf jeder Geraden, die die durch ihren Durchgangspunkt mit der Ebene geht, und in dieser liegt; folglich ist die horizontale Spur der Ebene senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden. Auf dieselbe Weise kann aber auch gezeigt werden, dass die vertikale Spur 'E senkrecht auf der vertikalen Projektion m' n' der Geraden und die zweit-vertikale Spur senkrecht auf der zweit-vertikalen Projektion der Geraden sein muss, mithin folgt hieraus der Lehrsatz:

Steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, so müssen die Projektionen der Geraden senkrecht auf den entsprechenden Spuren der Ebene stehen, also die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf der horizontalen Spur der Ebene, die vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf der vertikalen Spur, und die zweit-vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf der zweit-vertikalen Spur der Ebene sein.

(Fig. 49.) $S_1 A_1 S'_1$ ist eine Ebene, deren horizontale Spur S_1, deren vertikale Spur S'_1 und deren zweit-vertikale Spur S''_1 ist, m_1 die horizontale, m'_1 die vertikale und m''_1 die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, von welchem eine Senkrechte auf die Ebene gezogen werden soll. Man wird also nur von m_1 auf S_1 die Gerade P_1 senkrecht ziehen, so erhält man die horizontale Projektion, von m'_1 auf S'_1 eine Senkrechte $'P_1$ ziehen, so wird man die vertikale Projektion erhalten, und endlich von m''_1 auf S''_1 die Senkrechte $"P_1$ ziehen, wodurch dann die zweit-vertikale Projektion der Senkrechten erhalten wird. — (Fig. 49.) Wenn nun die Projektionen einer Geraden einzeln senkrecht auf den zugehörigen Spuren einer Ebene stehen, nämlich die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf der horizontalen Spur der Ebene etc. etc., so wird die Gerade im Raume senkrecht auf der Ebene stehen. - Sind (S_2, S'_2, S''_2) die Spuren dieser Ebene, P_2 die horizontale Projektion der Geraden senkrecht auf S_2, P'_2 die vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf $'S_2$ und $"P_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden senkrecht auf $"S_2$ gezogen, und sind m_2, m'_2, m''_2 die Projektionen eines auf dieser Geraden liegenden Punktes, so müssen jedenfalls diese Projektionen einer auf der Ebene senkrechten Geraden angehören, die durch den gegebenen Punkt geht. Da aber schon durch zwei Projektionen einer Geraden letztere der Lage nach völlig bestimmt ist (§. 71.), so können die gegebenen Projektionen nicht zugleich einer zweiten Geraden angehören, mithin geben diese Projektionen bloss die durch den Punkt $(m_2 m'_2)$ gehende auf der Ebene senkrechte Gerade an. —

§. 85.

(Fig. 50.) Es seien zwei parallele Ebenen gegeben, welche dargestellt werden sollen; so denke man jede derselben (§§. 80. 81.) verlängert, bis sie die Projektionstafeln schneiden, um ihre Spuren zu erhalten. Betrachtet man nun ihre horizontalen Spuren, so sind diese die Durchschnitte der horizontalen Tafel mit den beiden parallelen Ebenen, und es müssen mithin (§. 33.) die horizontalen Spuren parallel unter sich sein. Aus demselben Grunde sind aber auch die vertikalen Spuren

sowohl, als auch die zweit-vertikalen Spuren unter sich parallel; woraus also folgt:

Sind zwei oder mehrere Ebenen parallel, so müssen ihre zusammengehörigen Spuren unter sich parallel sein. (Fig. 50.) Ist also $S_1 A_1 S'_1$ die eine, $S_2 A_2 'S_2$ die andere durch ihre Spuren dargestellte Ebene, so muss $S_1 \neq S_2$, $'S_1 \neq 'S_2$ und endlich $''S_1 \neq ''S_2$.

Sind aber die vertikalen Spuren sowohl, als auch die horizontalen Spuren einer Ebene unter sich parallel, und sind die Ebenen nicht parallel zu einer Projektionsaxe, so sind dieselben nach §. 36. unter sich parallel.

(Fig. 51.) Sind die Ebenen parallel mit einer Axe, z. B. mit der Axe X, so müssen die Spuren (§. 81.) parallel unter sich sein. Liegen nun die Spuren der einen Ebene zwischen den Spuren der andern Ebene, so sind auch die zweit-vertikalen Spuren $'E_2$ und $'E_1$ unter sich parallel, uud da $''E_2 \neq ''E_1$, $'E_2 \neq 'E_1$, ferner E_2 von $''E_2$ in A'_2 und $''E_1$ von $''E_1$ in A_1 getroffen wird, so müssen die Ebenen (§. 36.) unter sich parallel sein. (Fig. 52.) Sind aber die Spuren parallel unter sich und parallel zur Axe X, ohne dass die beiden Spuren der einen Ebene zwischen den beiden Spuren der andern Ebene liegen, so schneiden sich die zweit-vertikalen Spuren T''_1 und $''T_2$, weshalb also auch die Ebenen nicht unter sich parallel sein können.

Wenn also die Ebenen parallel zu einer der Projektionsaxen sind, und es sind sowohl die horizontalen, als auch die vertikalen, als auch die zweit-vertikalen Spuren unter sich parallel, so sind die Ebenen unter sich parallel, sind aber bloss die horizontalen Spuren und die vertikalen Spuren unter sich parallel, und die zweit-vertikalen Spuren nicht, so sind die Ebenen nicht parallel unter sich.

§. 86.

Durch die Sätze des vor. §. ist man im Stande, mit einer Ebene eine andere parallel zu ziehen, und zu erkennen, ob zwei Ebenen parallel unter sich sind, oder nicht. Ist eine Ebene nur durch ihre horizontale und vertikale Spur gegeben, und schneiden sich dieselben, was (§. 80.) in einem Punkte von X geschehen muss, so ist nur ein Punkt von einer der Spuren der zweiten Ebene anzugeben nothwendig, um dieselben bestimmen zu können. (Fig 50.) Ist z. B. in $'S_2$ ein Punkt gegeben, so ziehe man durch diesen parallel zu $'S_1$ eine Gerade, welche die Axe X in A_2 treffen wird. Durch A_2 die Gerade $S_2 \neq S_1$ gezogen, gibt $S_2 A_2 'S_2$ die zweite Ebene, welche parallel zur ersten Ebene $S_1 A_1 'S_1$ ist. Schneiden aber die Spuren der einen Ebene die X auf den Zeichnungstafeln nicht, und können letztere wegen Mangel an Raum nicht weiter verlängert werden, so muss man entweder die zweit-vertikale Spur dieser Ebene suchen, oder zwei Punkte angeben, die schon in der Ebene und einer der Projektionstafeln zugleich liegen, um die Spuren der andern Ebene angeben zu können. — Selten ist aber ein Punkt einer Spur selbst gegeben, sondern es sind grösstentheils die Projektionen eines Punktes gegeben, der sich auf der Ebene befindet, die mit der gegebenen parallel gezogen werden soll, In diesem Falle muss man durch den Punkt eine Generatrix der Ebene legen, ihren Durchgangspunkt mit einer der Projektionstafeln suchen, so wird dieser ein Punkt einer Spur der gesuchten Ebene sein. Die Ausführung dieser Aufgabe kann erst im nächsten Kapitel geschehen. —

Drittes Kapitel.

Aufgaben über gerade Linien und Ebenen.

§. 87.

Aufgabe 1. Es seien die Projektionen zweier Punkte gegeben, man soll ihre Entfernung angeben.

Auflösung. (Fig. 53.) Es sei OX der Durchschnitt der horizontalen mit der vertikalen Tafel, OZ der Durchschnitt der vertikalen und zweit-vertikalen Tafel, OZ der Durchschnitt der horizontalen und zweit-vertikalen Tafel, der ursprünglich in der horizontalen Tafel senkrecht auf X liegt, aber nach OZ der Verlängerung von X zu liegen kömmt, wenn die zweit-vertikale Tafel um OZ gedreht, und in die vertikale Tafel gelegt wird. Ferner sei a_1 die horizontale Projektion des einen, a'_1 seine vertikale und a''_1 seine zweit-vertikale Projektion, a_2 die horizontale Projektion des zweiten Punktes, a'_2 seine vertikale und a''_2 seine zweit-vertikale Projektion, so muss (§. 72.) $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale und $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden sein, welche die Entfernung dieser Punkte angibt. Suchen wir daher von dieser Geraden die wahre Länge, so muss diese die gesuchte Entfernung beider Punkte sein. Um nun diese Länge zu bestimmen, betrachte man eine

der projicirenden Ebenen, z. B. die horizontal-projicirende Ebene der Geraden, so ist in dieser ein Viereck enthalten, dessen eine Seite die horizontale Projektion der Geraden ist, von welchem ferner zwei andere Seiten die horizontal-projicirenden Linien beider Punkte sind, und dessen vierte Seite die Gerade im Raume ist. Nun ist aber jede dieser projicirenden Linien (§. 63.) senkrecht auf der horizontalen Tafel, also auch jede derselben (§. 7.) senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden und (§. 27.) unter sich parallel, so dass also das erwähnte in der horizontal-projicirenden Ebene liegende Viereck im Allgemeinen ein Trapez ist, dessen parallele Seiten die projicirenden Linien beider Punkte sind. Legt man daher die horizontal-projicirende Ebene, indem man dieselbe um ihre horizontale Spur, nämlich den horizontalen Projektion der Geraden dreht, in die horizontale Tafel; so wird jeder Punkt derselben einen Kreisbogen beschreiben, dessen Ebene (§. 23.) senkrecht auf der horizontalen Projektion der Geraden ist, und deren horizontale Spur mithin (§. 84.) auf dieser horizontalen Projektion der Geraden senkrecht ist. Es werden mithin auch die beiden Endpunkte der Geraden solche Kreise beschreiben, und daher in den horizontalen Spuren der Ebenen dieser Kreise liegen bleiben, aber so weit von der horizontalen Projektion der Geraden (Drehungsaxe) entfernt bleiben, als diess vorher der Fall war. Zieht man daher von dem Endpunkte der horiontalen Projektionen der Geraden Senkrechte auf diese und zwar nach derjenigen Seite hin, wo man die horizontal-projicirende Ebene niedergelegt hat, so werden die beiden Endpunkte der Geraden in diesen liegen, und in ihrer wahren Entfernung sichtbar sein. Man hat daher nur diese beiden Senkrechten gleich den horizontal-projicirenden Linien beider Punkte zu machen, also (§. 63.) gleich ihren vertikalen Ordinaten, so wird die Entfernung ihrer Endpunkte die vierte Seite des erwähnten Trapezes, also die gesuchte Entfernung der beiden gegebenen Punkte im Raume sein. — (Fig. 53.) Zieht man also von a_1 eine Senkrechte auf $a_1 a_2$, und macht dieselbe, nämlich $a_1 A_3 = a'_1 m_1$, zieht ferner $a_2 B_3$ senkrecht auf $a_1 a_2$, und macht $a_2 B_3 = a'_2 n$, so wird $A_3 B_3$ gleich der gesuchten Entfernung beider Punkte sein. Dieselbe Entfernung hätte man gefunden, wenn man die vertikal-projicirende Ebene um $a'_1 a'_2$ gedreht, und in die vertikale Tafel gelegt hätte. Es wird nämlich hierdurch das Viereck $A_1 a'_1 a'_2 B_1$ sichtbar, in welchem $a'_1 A_1 = m a_1$ (§. 63.) und senkrecht auf $a'_1 a'_2$, $a'_2 B_1 = n a_2$ und senkrecht auf $a'_1 a'_2$ ist, dessen vierte Seite $A_1 B_1$ mithin dieselbe Entfernung oder die Länge der begränzten Geraden im Raume ist, so dass also $A_1 B_1 = A_3 B_3$ sein muss. Endlich wird man $A_2 B_2 = A_3 B_3 = A_1 B_1$ finden, wenn man das zweit-vertikal-projicirende Trapez um $a''_1 a''_2$ dreht, und in die zweit-vertikale Tafel legt, wobei das Viereck $A_2 B_2 a''_2 a''_1$ sichtbar wird, in welchem $a''_1 A_2 = a'_1 p$ und senkrecht auf $a''_1 a''_2$, $a''_2 B_2 = a'_2 q$ und senkrecht auf $a''_1 a''_2$ sein muss. —

§. 88.

(Fig. 53.) Zieht man $B_3 C_3 \neq a_2 a_1$, so wird $B_2 C_3$ gleich der Differenz der beiden vertikalen Ordinaten, also $A_3 C_3 = a'_1 m - a'_2 n$ sein. Ebenso muss, wenn man $A_1 C_1 \neq a'_1 a'_2$ zieht, $B_1 C_1 = B_1 a'_2 - A_1 a'_1 = a_2 n - a_1 m$, und endlich, wenn man $A_2 C_2 \neq a''_1 a''_2$ zieht: $B_2 C_2 = B_2 a''_2 - A_2 a''_1 = a'_2 q - a'_1 p$ sein, so dass also hieraus geschlossen werden kann:

Die Entfernung beider Punkte ist die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete die Entfernung der horizontalen Projektionen beider Punkte, und dessen andere Kathete die Differenz ihrer vertikalen Ordinaten ist; oder dessen eine Kathete die Entfernung der vertikalen Projektionen beider Punkte ist, und die andere die Differenz ihrer beiden horizontalen Orinaten: oder endlich dessen eine Kathete die Entfernung der vertikalen Projektionen beider Punkte, und die andere der Unterschied der Abscissen (zweit-vertikalen Ordinaten) beider Punkte ist.

§. 89.

Es ist nach dem, was im vorigen Paragraphe gesagt wurde, zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte oder der Länge einer begränzten Geraden nichts zu wissen nothwendig, als die Länge der horizontalen Projektion der Geraden, und die vertikalen Ordinaten ihrer Endpunkte; oder die Länge der vertikalen Projektion der Geraden und die horizontalen Ordinaten ihrer Endpunkte; oder endlich die Länge der zweit-vertikalen Projektion der Geraden und die Abscisse ihrer Endpunkte. Man kann aber auch leicht erkennen, dass zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte ihre Coordinaten hinreichen. (Fig. 53.) Denkt man sich nämlich von a_1 aus eine Parallele zu X gezogen, so ist der zwischen $a_1 m$ und $a_2 n$ liegende Theil derselben gleich $m n = a'_2 q - a'_1 p$, und es bildet diese Parallele mit $a_1 a_2$ ein recht-

winkliges Dreieck, dessen eine Kathete also gleich $a'_2 q - a'_1 p$ gleich der Differenz der beiden Abscissen, dessen andere Kathete aber gleich $a_2 n - a_1 m$ oder gleich der Differenz beider horizontalen Ordinaten ist, so dass also die horizontale Projektion als die Hypothenuse dieses Dreieckes leicht konstruirt werden kann. Betrachtet man nun diese als Kathete eines neuen Dreieckes dessen andere Kathete die Differenz der vertikalen Ordinaten beider Punkte ist, so wird die Hypothenuse dieses Dreieckes die gesuchte Entfernung sein.

Anmerk. 1. Denkt man sich die ganze Construktion im Raume vorgenommen, so erscheint die Entfernung der beiden Punkte als Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dessen eine Kante die Differenz der horizontalen Ordinaten, dessen zweite Differenz der vertikalen Ordinaten, und dessen dritte Kante die Differenz der Abscissen ist.

Anmerk. 2. Diese gesuchte Entfernung kann leicht durch Rechnung gefunden werden. Ist nämlich

$a_2 n = y_1$, $a_1 m = y_2$, $a'_2 n = z_1$, $a'_1 m = z_2$, $a'_1 p = x_2$, $a'_2 q = x_1$,

so ist

$$\overline{a_1 a_2}^2 = \overline{B_3 C_3}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

und da

$$\overline{A_3 B_3}^2 = \overline{C_3 B_3}^2 + \overline{A_3 C_3}^2 \text{ ist,}$$

so hat man

$$\overline{A_3 B_3}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

folglich

$$A_3 B_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

§. 90.

Einige Beispiele zur Uebung sollen nun vorgenommen werden.

Beispiel 1. (Fig. 54.) Es sei $a_1 a_2$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2$ die vertikale und $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden. Dabei soll $a_1 a_2 \neq X$ sein, mithin wird auch $a''_1 a''_2 \neq Z$, und diese Gerade muss (§. 74.) parallel zur vertikalen Tafel sein; folglich ist $a'_1 a'_2$ die Entfernung der beiden Punkte oder die Länge dieser begränzten Geraden. Diess geht auch daraus hervor, weil das vertikal-projicirende Trapez hier in ein Parallelelogramm übergeht, in welchem $a'_1 A = a'_2 B = m a_1$ ist, und mithin auch $a'_2 a'_1 = BA$ der Entfernung der beiden Punkte sein muss.

Beispiel 2. (Fig. 57.) Sind (a_1, a'_1, a''_1) die Projektionen eines Punktes, a_2, a'_2, a''_2 die Projektionen eines zweiten Punktes, so muss die Gerade, welche ihre Entfernung angibt (§. 74.) parallel zur zweit-vertikalen Tafel oder in einer auf X senkrechten Ebene liegen; mithin wird $a''_1 a''_2$, nämlich die zweit-vertikale Projektion dieser Geraden gleich ihrer wahren Länge sein, und die Entfernung der beiden Punkte $(a_1, a'_1, a''_1), (a_2, a'_2, a''_2)$ angeben. — Sollte man die Länge dieser Geraden ohne Benützung ihrer zweit-vertikalen Projektion suchen, so könnte man nach §. 87. verfahren, das horizontal-projicirende Trapez $a_1 B A a_2$ konstruiren, in welchem $a_1 B =$ der Entfernung der Projektion a'_1 des ersten Punktes von X, $a_2 A$ gleich der Entfernung der vertikalen Projektion a'_2 des Punktes von X wird, und daher $AB = a''_1 a''_2 =$ der Länge der Geraden oder der Entfernung beider Punkte ist. Oder man könnte nach §. 88. verfahren, und sogleich das rechtwinklige Dreieck $a_1 B' a_2$ konstruiren, in welchem $a_1 B' =$ der Differenz der vertikalen Ordinaten beider Punkte $= a'_1 q - a'_2 q$ ist, so wird $a_2 B'$ die Länge derselben Geraden angeben. —

Beispiel 3. (Fig. 55.) Nun sei die Entfernung zweier Punkte anzugeben, von welchen der eine im vierten Quadranten liegt, und rechts von der zweit-vertikalen Tafel. Dieser Punkt ist durch seine horizontale Projektion a_2, seine vertikale Projektion a'_2 und durch seine zweit-vertikale Projektion a''_2 gegeben, der andere Punkt sei durch die Projektionen a_1, a'_1, a''_1 gegeben. Für den zweiten Punkt geht die horizontale Ordinate in derselben Richtung wie für den ersten, also haben auch die vertikal-projicirenden Linien beider Punkte dieselbe Richtung. Die vertikalen Ordinaten beider Punkte hingegen haben entgegengesetzte Richtung, mithin auch ihre vertikal-projicirenden Linien. Sucht man daher die Entfernung beider Punkte, indem man die horizontal-projicirende Ebene dieser Geraden um $a_1 a_2$ dreht, und in die horizontale Tafel legt, sodann das in §. 87. erwähnte Trapez konstruirt, so wird, weil die horizontal-projicirende Linie des einen Punktes entgegengesetzte Richtung, wie die des andern hat, auch $a_2 B = a'_2 n$ entgegengesetzte Richtung haben, wie $a_1 A = a'_1 m$. Trägt man also $a_1 A = a'_1 m$ senkrecht auf $a_1 a_2$ von a_1, und auf der andern Seite $a_1 a_2$ senkrecht auf diese $a_2 B = a'_2 n$, so wird die Gerade AB die gesuchte Entfernung beider Punkte sein. Zieht man nun $a_2 A \neq AB$, so ist $A'A = a_1 B$, und mithin $a_1 A = a_1 m + a'_2 n =$ der Summe der vertikalen Ordinaten beider Punkte. Das vertikal-projicirende Trapez wird ebenfalls dieselbe Entfernung $CD = AB$ angeben, allein die vertikal-projicirenden Linien $a'_1 D = a_1 m$ und $a'_2 C = a_2 m$ werden dieselbe Richtung haben, und mithin auch auf einer und derselben Seite von $a'_1 a'_2$ aufgetragen werden; so dass wieder $a'_1 D' = a_1 m - a_2 n$, wie §. 87. ist. Dasselbe gilt in Bezug auf das zweit-vertikal-projicirende Trapez. —

Beispiel 4. (Fig. 56.) Es sei a_1 die horizontale Projektion, a'_1 die vertikale und a''_1 die zweit-vertikale Projektion eines Punktes, $a_2\, a'_2\, a''_2$ seien die Projektionen eines zweiten Punktes, so liegt (§. 65.) der erste Punkt im ersten Quadranten, der zweite im dritten Quadranten, aber beide rechts der zweit-vertikalen Tafel. Die vertikal-projicirenden Linien beider Punkte sowohl, als auch ihre horizontal-projicirenden Linien haben mithin entgegengesetzte Richtung, weshalb also bei der Construktion des vertikal-projicirenden Trapezes die Seite $a'_2 B_1 = a_2 n$, die senkrecht auf $a'_2 a'_1$ von a'_2 aus ausgezogen wurde, auf entgegengesetzter Seite aufgetragen werden, also $a'_1 A_1 = a_1 m$ gemacht werden muss, so dass $a' A_1$ auf $a'_1 a'_2$ in a'_1 senkrecht steht. Zieht man $B_1 A_1$, so wird diese die Entfernung beider Punkte sein. Dieselbe Entfernung ist auch durch $A_1 B_1$ gefunden, die erhalten wurde, indem man $a_2 B_2 = a'_2 n$ und $a_1 A_2 = a'_1 m$ senkrecht auf $a_1 a_2$ aber in entgegengesetzten Richtungen in Bezug $a_1 a_2$ getragen hat. Ebenso ist $A_3 B_3 = A_2 B_2 = A_1 B_1$ gleich der Entfernung beider Punkte, welche nach dem schon mehrmals angegebenen Verfahren gefunden wurde. Zieht man $a'_2 C \neq A_1 B_1$ und $a_2 C_2 \neq B_2 A_2$ so ist auch $A_1 B_1 = C_1 a'_2$ und $a_2 C_2 = B_2 A_2$, mithin die Länge dieser Geraden die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe der horizontal-projicirenden Linien oder der vertikalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist; oder die vertikale Projektion $a'_1 a'_2$ die eine Kathete, und $(a'_1 A_1 + A_1 C_1 = a_1 m + a_2 n)$ die Summe der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte oder ihre vertikal-projicirenden Linien, die andere Kathete ist. —

Beispiel 5. (Fig. 59.) Nun seien wieder die Projektionen zweier Punkte gegeben, und zwar a_1 die horizontale, a'_1 die vertikale und a''_1 die zweit-vertikale Projektion des ersten Punktes, a_2 die horizontale, a'_2 die vertikale und a''_2 die zweit-vertikale Projektion des zweiten Punktes, welcher letztere (§. 66.) im zweiten Quadranten liegt, und weil seine horizontale und vertikale Projektion links von Z, seine zweit-vertikale Projektion aber rechts von Z ist, so befindet sich dieser Punkt links der zweit-vertikalen Tafel. Die horizontal-projicirenden Linien beider Punkte oder ihre vertikalen Ordinaten, nämlich $a'_1 n$ und $a'_2 m$ haben gleiche Richtung, und werden mithin auf einer und derselben Seite von $a_2 a_1$ aufgetragen, wenn man BA die Länge der Geraden finden will. Das vertikal-projicirende Trapez wird nach Beispiel 4. erhalten; das zweit-vertikal-projicirende Trapez $a''_1 C D a''_2$ muss aber hier, weil $a'_2 q$ in entgegengesetzter Richtung von $a'_1 a$ liegt so konstruirt werden, dass $a''_2 D = a'_2 q$ entgegengesetzt von $a''_1 C = a'_1 r$ aufgetragen werden muss; denn die zweit-vertikal-projicirenden Linien beider Punkte haben entgegengesetzte Richtung, und kommen mithin in ihren Ebenen auch entgegengesetzt von $a''_2 a''_1$ zu liegen.

§. 91.

Die im vorigen Paragraphe enthaltenen Beispiele führen zu folgenden Folgerungen:

1. Befindet sich der eine der Punkte, deren Entfernung bestimmt werden soll, im ersten, der andere im zweiten Quadranten, so ist die Länge dieser Entfernung die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, von welchem ihre vertikale Projektion die eine, die Summe der horizontalen Ordinaten beider Punkte die andere Kathete oder die horizontale Projektion die eine Kathete und die Differenz beider vertikalen Ordinaten die andere Kathete ist. — Liegt der zweite Punkt im dritten Quadranten, so ist die gesuchte Entfernung beider Punkte Hypothenuse eines rehtwinkligen Dreieckes, in welchem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe beider vertikalen Ordinaten ihrer Endpunkte die andere, oder ihre vertikale Projektion die eine und sodann die Summe der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist. — Liegt endlich der zweite Punkt im vierten Quadranten so ist die Länge der Geraden, welche die beiden Punkte verbindet, Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, in dem entweder die horizontale Projektion der Geraden die eine und die Summe der vertikalen Ordinaten beider Endpunkte die andere, oder ihre vertikale Projektion die eine und die Differenz der horizontalen Ordinaten beider Endpunkte die andere Kathete ist. — Befinden sich beide Punkte in einem und demselben Quadranten, so haben ihre projicirenden Linien gleiche Richtung, und man kann mithin bei der Aufsuchung ihrer Entfernung ganz nach den §§. 87. und 88. verfahren; befinden sich aber beide Punkte in verschiedenen Quadranten, so ist auf die Richtung der projicirenden Linien oder der Ordinaten, denen sie gleich sind, Rücksicht zu nehmen. Wie man darauf Rücksicht nehmen kann, ist leicht aus den Beispielen und dem Eingange dieses Paragraphes zu ersehen. Eben so wird man auch das Verfahren erkennen, welches man einzuschlagen hat, wenn man die Länge der Geraden durch das zweit-vertikal-projici-

rende Trapez suchen will, und sich der Punkt rechts oder links der zweit-vertikalen Tafel befindet. —

2. Da die Projektion einer Geraden gleich ihrer Länge sein wird, wenn die Gerade parallel zur Projektionstafel ist, so kann man ein zweites in manchen Fällen bequemeres Verfahren einschlagen, um die Länge einer Geraden zu finden. Dieses Verfahren besteht nämlich darin, dass man einen Endpunkt der Geraden fix liegen lässt, während man die Gerade um diesen Punkt dreht, bis sie parallel mit einer der Projektionstafeln ist. Dreht man also die Gerade um ihren Anfangspunkt, bis sie parallel mit der horizontalen Tafel ist, und zwar so, dass der andere Endpunkt in einer Geraden bleibt, die parallel zur vertikalen Tafel ist, so kömmt die Gerade nach der Drehung in eine Ebene zu liegen, die parallel zur horizontalen Tafel, und deren vertikale Spur mithin (§. 85.) parallel mit X ist. In letztere wird (§. 83.) die vertikale Projektion der Geraden nach der Drehung zu liegen kommen, und ihre vertikale Projektion die vorige Länge beibehalten, weil die vertikal-projicirenden Linien beider Endpunkte, also ihre horizontalen Ordinaten sich nicht verändert haben; die horizontal-projicirenden Linien beider Endpunkte aber, oder ihre vertikalen Ordinaten müssen nun einander gleich sein, und gleich der vertikalen Ordinate des fixen Punktes. Zieht man daher von der vertikalen Projektion des fixen Punktes aus eine Gerade parallel mit X, und macht diese gleich der vertikalen Projektion der Geraden, so erhält man die neue vertikale Projektion der Geraden, zu welcher die entsprechende horizontale Projektion gefunden wird, indem man die vorigen horizontalen Ordinaten beider Endpunkte beibehält, und die in §. 63. erwähnten Sätze berücksichtiget. Diese neue horizontale Projektion der Geraden muss nun (§. 74.) gleich der Länge der Geraden sein. Analog wird man verfahren, wenn man die Gerade parallel zur vertikalen oder zur zweit-vertikalen Tafel dreht. Im folgenden §. sind auch über dieses Verfahren einige Beispiele enthalten. —

§. 92.

Beispiel 1. (Fig. 60.) Es sei $a_1 a_2$ die horizontale Projektion einer begränzten Geraden, $a'_1 a'_2$ ihre vertikale Projektion, so lasse man den Punkt $a_1 a'_1$ fix liegen, denke sich die Gerade so gedreht, dass ihr Endpunkt in einer auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Geraden also von der vertikalen Tafel in gleicher Entfernung bleibt, die Gerade selbst aber nach der Drehung in eine Ebene zu liegen kömmt, die parallel zur vertikalen Tafel ist; so wird ihre neue vertikale Projektion $a'_1 b'_2 \neq X$ und $= a'_1 a'_2$ werden, die horizontale Projektion des ersten Punktes bleibt in a_1, die des zweiten aber muss in $b'_2 b_2$ (§. 63.) liegen, und nach vorigem §. in der mit X parallelen Geraden $a_2 b_2$, und ist mithin b_2. Zieht man also die Gerade $a_1 b_2$, so ist diese die neue horizontale Projektion der Geraden, und gibt mithin ihre wahre Länge an. — Zieht man $a_1 b_1 \neq X$ und gleich $a_1 a_2$, zieht ferner $b_1 b'_1$ senkrecht auf X und $a'_2 a'_1 \neq X$, verbindet den Durchschnittspunkt b'_1 mit a'_1 durch die Gerade $a'_1 b'_1$, so wird letzere (§. 91.) auch gleich der Länge der Geraden sein. Auf gleiche Weise kann man durch $a''_2 b''_3$ die Länge der Geraden erhalten. —

Beispiel 2. (Fig 58.) Hier sei $a_1 a_2$ die horizontale und $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion einer Geraden, deren Endpunkte (§. 65.) im zweiten Quadranten liegen. Da nun diese beiden Endpunkte in einem und demselben Quadranten liegen, so ändert sich gar nichts, und wir können ebenso unsere Construktion machen, als wenn sich die Punkte im ersten Quadranten befinden würden, nur müssen wir jetzt die horizontale Tafel an der Stelle der vertikalen Tafel, und die vertikale Tafel in der gewöhnlichen Lage der horizontalen Tafel uns denken. Zieht man also $a_1 b \neq X$ und macht $a_1 b = a_1 a_2$, zieht $b b'$ senkrecht auf X, $a'_2 b' \neq X$, und verbindet a'_1 und b' durch die Gerade $a'_1 b$, so muss (§. 91.) letztere gleich der Entfernung beider Punkte sein, weil sie (§. 74.) parallel zur vertikalen Tafel ist. Dieselbe Länge AB hat man (§. 87.) durch das vertikal-projicirende Trapez $a'_1 {}'_2 AB$. —

§. 93.

Aufgabe 2. Eine Gerade ist durch ihre Projektionen gegeben; man soll ihre Durchgangspunkte mit den Tafeln suchen, vorausgesetzt, dass sie jede der Tafeln bei gehöriger Verlängerung trifft.

Auflösung. Der Durchgangspunkt einer Geraden mit einer der Tafeln wird auch Spur der Geraden genannt, und zwar ihr Durchgangspunkt mit der horizontalen Tafel **horizontale Spur**, ihr Durchgangspunkt mit der vertikalen Tafel **vertikale Spur**, endlich ihr Durchgangspunkt mit der zweit-vertikalen Tafel **zweit-vertikale Spur**. Diese Spuren werden offenbar erhalten, wenn man sich die Gerade so weit verlängert denkt, bis sie die Tafeln trifft. Um also die horizontale Spur der Geraden zu erhalten, müssen wir uns die Gerade

verlängert denken, bis sie die horizontale Tafel trifft, wobei also auch ihre Projektionen länger werden. Nun ist die horizontale Spur der Geraden ein Punkt der letzteren sowohl, als auch ein Punkt der horizontalen Tafel; mithin müssen sich die Projektionen dieser horizontalen Spur (§. 72.) in den Projektionen der Geraden befinden, und (§. 70.) ihre vertikale Projektion in der Axe liegen. Letztere ist also im Durchschnitte der vertikalen Projektion der Geraden mit der Axe X, und wird erhalten, wenn man die vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert. Da nun die horizontale Projektion dieses Punktes (§. 72.) in der horizontalen Projektion der Geraden, und (§. 63.) mit seiner vertikalen Projektion in einer auf X senkrechten Geraden liegen muss, so ist seine horizontale Projektion im Durchschnitte der horizontalen Projektion der Geraden mit der von der vertikalen Projektion des Punktes auf X gezogenen Senkrechten. Diese horizontale Projektion des Punktes ist aber die horizontale Spur der Geraden, und es wird mithin diese erhalten, wenn man die vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert, von dem erhaltenen Durchschnittspunkte auf X eine Senkrechte zieht, so wird im Durchschnitte der letzteren mit der horizontalen Projektion der Geraden die gesuchte horizontale Spur sein. Diese horizontale Spur kann man auch erhalten, wenn man die zweit-vertikale Projektion der Geraden bis zur Axe Y verlängert, den erhaltenen Punkt von letzterer in seine richtige Lage auf Y bringt, indem man die zweit-vertikale Tafel in ihre erste Lage gebracht denkt, sodann von diesem Punkte auf Y eine Senkrechte zieht, deren Durchschnitt mit der horizontalen Projektion der Geraden der gesuchte Punkt sein wird. — Analog ergibt sich die Regel für die Auffindung der vertikalen Spur; indem man die horizontale Projektion der Geraden bis zur Axe X verlängert, wodurch die horizontale Projektion der vertikalen Spur erhalten wird, sodann von diesem Punkte auf X eine Senkrechte zieht, die in der vertikalen Tafel oder deren Verlängerung liegt, so wird im Durchschnitte dieser Senkrechten mit der vertikalen Projektion der Geraden die gesuchte vertikale Spur sein. —

§. 94.

Beispiel 1. (Fig. 61.) Ist $a_1 a_2$ die horizontale Projektion, $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion der Geraden, und $a''_1 a''_2$ ihre zweit-vertikale Projektion, und man soll denjenigen Punkt derselben finden, in welchem sie die horizontale Tafel trifft; so verlängere man (§. 93.) $a'_1 a'_2$ bis zur Axe X, wodurch man den Punkt s'_1 erhält, der die vertikale Projektion der gesuchten horizontalen Spur ist. Von s'_1 auf X eine Senkrechte gezogen, die in der horizontalen Tafel liegt, und $a_1 a_2$ verlängert bis zum Durchschnitte s_1 mit dieser Senkrechten, so wird dieser Punkt die gesuchte horizontale Spur sein. Verlängert man $a''_1 a''_2$ bis Y, und dreht den erhaltenen Punkt s''_1, bis er die richtige Lage von OY trifft, so ist s''_1 die zweit-vertikale Projektion der horizontalen Spur, welche letztere also im Durchschnitte der von s''_1 auf Y gefällten Senkrechten mit $a_1 a_2$ sein wird. Ebenso erhält man die vertikale Spur der Geraden, wenn man ihre horizontale Projektion bis X oder ihre zweit-vertikale Projektion bis Z verlängert, es wird dann s_2 die horizontale und s''_2 die zweit-vertikale Projektion der gesuchten vertikalen Spur sein. Die von s_2 auf X und die von s''_2 auf Z gezogenen Senkrechten müssen sich daher in dem Punkte s'_2 der vertikalen Projektion $a'_2 a'_1$ treffen, welcher die gesuchte vertikale Spur der Geraden ist. Auf gleiche Weise erhält man die zweit-vertikale Spur s''_3 der Geraden, indem man die vertikale Projektion der Geraden bis Z verlängert, wodurch die vertikale Projektion s'_3 der zweit-vertikalen Spur erhalten wird. Zieht man nun von s'_3 auf Z eine Senkrechte, so wird im Durchschnittspunkte s''_3 derselben mit $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Spur der Geraden erhalten werden. —

Beispiel 2. (Fig. 62.) Hier sei $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale und mithin $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion der Geraden; man soll ihre Spuren bestimmen. Die horizontale Spur s_3 wird (§. 93.) erhalten, wenn man $a'_1 a'_2$ bis zur Axe X verlängert, von der hierdurch erhaltenen vertikalen Projektion s_1 der horizontalen Spur auf X eine Senkrechte $s'_1 s_1$ zieht, die in der horizontalen Tafel (oder deren Verlängerung) liegt, so wird im Durchschnitte dieser Senkrechten mit der horizontalen Projektion $a_1 a_2$ der Geraden, nämlich in s_1 die gesuchte horizontale Spur sein. Die vertikale Spur wird erhalten, wenn man die horizontale Projektion $a_1 a_2$ bis X verlängert, von der hierdurch erhaltenen horizontalen Projektion s_2 der vertikalen Spur auf X eine Senkrechte zieht, die hier in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegen muss, damit sie von der Verlängerung der vertikalen Projektion $a'_1 a'_2$ getroffen wird. Der hierdurch erhaltene Durchschnittspunkt ist die gesuchte horizontale Spur.

Beispiel 3. (Fig. 63.) Ist L die horizontale, 'L die vertikale Projektion einer Geraden, deren zweit-vertikale Projektion also in "L sein muss, so findet man durch Verlängerung von L bis zur Axe X in s_2 die horizontale Projektion der vertikalen Spur. Die vertikale Spur selbst wird also erhalten, wenn man $s_2 s'_2$ senkrecht auf X in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel zieht, und diese Senkrechte von 'L durchschneidet, was in s'_2 geschieht, weshalb man also in s'_2 die vertikale Spur der Geraden findet, die in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel liegt. Ebenso findet man durch Verlängerung der vertikalen Projektion 'L bis zur Axe in s'_1 die vertikale Projektion der horizontalen Spur der Geraden, und folglich in s_1 diese horizontale Spur selbst, die in der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel und links der zweit-vertikalen Tafel liegt. Endlich wird die zweit-vertikale Spur dieser Geraden gefunden, wenn man 'L bis zur Axe Z verlängert, von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte s'_3 auf Z eine Senkrechte zieht, deren Verlängerung in s''_3 von der zweit-vertikalen Projektion "L der Geraden getroffen wird, und worin auch ihre zweit-vertikale Spur liegt. Man kann, wie aus der Fig. zu ersehen durch die horizontale Projektion s_3 dieser Spur dieselbe auch finden. Diese zweit-vertikale Spur liegt in der rückwärtigen Verlängerung der zweit-vertikalen Tafel unterhalb der horizontalen Tafel. —

Beispiel 4. Es sei $a_1 a_2$ die horizontale, $a'_1 a'_2$ die vertikale, folglich $a''_1 a''_2$ die zweit-vertikale Projektion einer Geraden. Diese Gerade ist (nach §. 74.) parallel zur zweit-vertikalen Tafel, weshalb also von einer zweit-vertikalen Spur dieser Geraden nicht die Rede sein kann. Ihre vertikale Spur wird erhalten, wenn man die zweit-vertikale Spur bis Z verlängert, von der hierdurch erhaltenen zweit-vertikalen Projektion s''_2 der vertikalen Spur auf Z eine Senkrechte zieht, diese bis zum Durchschnitte mit $a'_1 a'_2$ verlängert, so erhält man den Punkt s_2, der die vertikale Spur der Geraden ist. Ebenso ist in s''_1 die zweit-vertikale Projektion der horizontalen Spur, die in ihre richtige Lage gebracht werden muss, indem man mit Os''_1 einen Bogen von O aus beschreibt, der in der ursprünglichen Lage der Axe Y die richtige Lage der zweit-vertikalen Projektion s''_1 dieser Spur bezeichnet. Von s''_1 auf Y eine Senkrechte in der horizontalen Tafel gezogen, so erhält man in s_1, dem Durchschnitte dieser Senkrechten mit der Verlängerung der horizontalen Projektion $a_1 a_2$ der Geraden ihre horizontale Spur. —

§. 95.

Ohne eine zweite Projektion zu benützen, kann man jede Spur der Geraden durch ein zweites Verfahren erhalten. Betrachten wir die horizontale Spur, so muss diese erstens in der Geraden liegen, und mithin (§. 72.) ihre horizontale Projektion in der horizontalen Projektion der Geraden, zweitens in der horizontalen Tafel selbst; folglich ist die horizontale Spur im Durchschnitte der Geraden mit ihrer horizontalen Projektion. Hieraus ist auch klar, dass die vertikale Spur im Durchschnittspunkte der Geraden mit ihrer vertikalen Projektion, und die zweit-vertikale Spur im Durchschnitte der Geraden mit ihrer zweit-vertikalen Projektion liegen muss. — (Fig. 61.) Legt man daher (§. 87.) das horizontal-projicirende Trapez um die horizontale Projektion $a_1 a_2$ in die horizontale Tafel, und verlängert in dieser horizontal-projicirenden Ebene die Gerade, bis sie ihre horizontale Projektion trifft, was hier in s_1 geschieht, so wird die horizontale Spur der Geraden erhalten. Legt man die vertikal-projicirende Ebene der Geraden um $a'_1 a'_2$ drehend in die vertikale Tafel, konstruirt in dieser (§. 87.) das Trapez $A_2 a'_2 a'_1 B$, so wird im Durchschnitte der Geraden $A_2 B_2$ mit ihrer vertikalen Projektion, nämlich s'_2 die vertikale Spur der Geraden sein, deren zweit-vertikale Spur auf ähnliche Weise in s''_3 erhalten wird. Wenn daher eine unbegränzte Gerade gegeben ist, so kann man dieselbe zuerst nach den Regeln des §. 75. begränzen, und dieses Verfahren einschlagen. Dieses Verfahren macht in Fig. 64. die zweit-vertikale Tafel überflüssig, indem man nur das vertikal-projicirende Trapez $a'_2 a'_1 B_2 A_2$ konstruiren darf, um die vertikale Spur s_2, und das horizontal-projicirende Trapez $a_1 A_1 B_1 a_2$ konstruiren darf, um die horizontale Spur s_1 der Geraden zu erhalten. —

§. 96.

Aufgabe 3. Die horizontale und vertikale Spur einer Geraden sind gegeben; man soll die Gerade durch ihre Projektionen angeben.

Auflösung. Nach §. 70. ist die vertikale Projektion der horizontalen Spur in der Axe X, und nach §. 63. muss dieselbe auch in der Senkrechten liegen, die man von der horizontalen Projektion dieser Spur auf X zieht; mithin wird die vertikale Projektion dieser horizontalen Spur im Durchschnittspunkte der Senkrechten mit X liegen, die man von der horizontalen Spur auf X zieht. Ebenso wird die horizontale Projektion der angegebenen vertikalen Spur erhalten, wenn man von

letzterer auf X eine Senkrechte zieht. Nun liegen die beiden Spuren auf der Geraden, und mithin (§. 72.) ihre Projektionen auf den Projektionen der Geraden; daher müssen die Projektionen der Geraden durch die Projektionen der beiden Spuren gehen. Verbindet man daher die vertikale Spur der Geraden mit der vertikalen Projektion der horizontalen Spur, so erhält man die vertikale Projektion, und zieht man von der horizontalen Spur nach der horizontalen Projektion der vertikalen Spur eine Gerade, so erhält man die horizontale Projektion der Geraden, die mithin der Lage nach (§. 71.) völlig bestimmt ist. — (Fig. 61.) Ist z. B. s_1 die horizontale und s'_2 die vertikale Spur einer Geraden gegeben, so ziehe man von s_1 aus auf X eine Senkrechte, und man wird (§. 70.) in s'_1 die vertikale Projektion von s_1 erhalten. Zieht man ferner von s'_2 auf X eine Senkrechte, so muss in s_2 die horizontale Projektion von s'_2 liegen. Zieht man nun die Gerade $s'_2 s'_1$ und $s_2 s_1$, so werden diese (§. 72.) die Projektionen der gesuchten Geraden sein, aus welchen auch ihre zweit-vertikale Projektion $s''_2 s''_1$, und die Lage derselben bestimmt werden kann. —

§. 97.

Aufgabe 4. Aus den Projektionen einer Geraden die Winkel zu bestimmen, welche dieselbe mit den Projektionstafeln macht.

Auflösung. Nach §. 21. wird der Winkel, den eine Gerade mit einer beliebigen Ebene macht erhalten, wenn man

1. die Gerade bis zur Ebene verlängert, und sodann ihre Spur nach §. 95. bestimmt;
2. von einem beliebig auf derselben angenommenen Punkte eine Senkrechte auf die Ebene zieht, und den Fuss der letzteren bezeichnet, wodurch aber (§. 65.) die Projektion jenes Punktes auf dieser Ebene erhalten wird;
3. den Fuss der Senkrechten mit der Spur der Geraden durch eine Gerade (welche nach §. 73. die Projektion der Geraden ist) verbindet, so wird der Winkel, den letztere mit der gegebenen Geraden bildet der gesuchte sein.

Suchen wir daher den Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, so haben wir zuerst die horizontale Spur der Geraden zu bestimmen, sodann von einem beliebigen Punkte der Geraden auf die horizontale Tafel eine Senkrechte zu ziehen, und den Fuss der letzteren mit der horizontalen Spur zu verbinden, um die Gerade zu erhalten, welche mit der gegebenen den gesuchten Winkel bildet. Da aber hierdurch zuerst die horizontale Projektion der Geraden gesucht wurde, welche in unserer Aufgabe schon als bekannt vorausgesetzt werden kann, so kann man hieraus schliessen, dass der Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet kein anderer ist, als der, den diese Gerade mit ihrer horizontalen Projektion bei genugsamer Verlängerung einschliesst. Ebenso ist der Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel einschliesst kein anderer, als der, welchen dieselbe mit ihrer vertikalen Projektion macht; so dass man also sagen kann:

Der Winkel, welchen eine Gerade mit einer der Projektionstafeln einschliesst, wird erhalten, wenn man die Spur der Geraden in dieser Tafel sucht, dann die projicirende Ebene um die Projektion der Geraden dreht und in die Tafel legt, und in dieser projicirenden Ebene einen beliebigen Punkt der Geraden bestimmt, diesen mit der Spur durch eine Gerade verbindet, so wird der Winkel, den letztere mit der Projektion der Geraden macht, der gesuchte sein.

§. 98.

Beispiel. 1. (Fig. 65.) Ist b die horizontale und b' die vertikale Spur einer Geraden, deren Projektionen a'b' und ab gegeben sind, und man sucht den Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, so lege man die horizontal-projicirende Ebene, um ab dieselbe drehend in die horizontale Tafel, ziehe von a aus auf ab eine Senkrechte gleich a'a, wodurch man sodann den Punkt A in der horizontal-projicirenden Ebene erhält, dessen Projektionen a und a' sind. Zieht man nun von A nach b eine Gerade, so wird $\sphericalangle Aba = \sphericalangle b$ der gesuchte sein, während Ab derjenige Theil der Geraden ist, der zwischen den beiden Spuren liegt. Legt man die vertikal-projicirende Ebene um a'b' in die vertikale Tafel, zieht von b' auf a'b' die Senkrechte $b'B = 'bb$, so wird B in der vertikal-projicirenden Ebene den Punkt angeben, dessen Projektionen b und b' sind. Verbindet man B mit a' durch a'B, so wird $\sphericalangle Ba'b' = v$ der Winkel sein, den die Gerade mit der vertikalen Tafel macht. Auf ähnliche Weise kann man $\sphericalangle v' = Bc''b''$ erhalten, unter welchen die Gerade gegen die zweit-vertikale Tafel geneigt ist. —

Beispiel 2. (Fig. 61.) Bei der Aufsuchung der Länge der Geraden $A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3$ hat man schon $< B_1 s_1 a_1 =$ dem Winkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel, $< A_2 s'_2 a'_2$ gleich dem Winkel, dem die Gerade mit der vertikalen Tafel macht, und endlich auch $< A_3 s''_3 a''_2$ gleich dem, den die Gerade mit der zweit-vertikalen Tafel macht. —

Beispiel 3. (Fig. 60.) Hier hat man die Gerade zuerst so um (a'_1, a_1) gedreht, dass dieselbe parallel zur vertikalen Tafel wurde, mithin wird $< b'_1 a_1 b_2$ der Winkel sein, den die Gerade mit der horizontalen Tafel macht. Denn diese Gerade macht nach dieser Drehung mit der horizontalen Tafel denselben Winkel, welchen sie vorher bildete. Denken wir uns nämlich durch den fixen Punkt dieser Geraden eine zur horizontalen Tafel parallele Ebene gezogen, so macht diese mit der Geraden denselben Winkel, den letztere mit der horizontalen Tafel macht. Projicirt man nun den beweglichen Endpunkt der Geraden auf diese neue Ebene, so ist der Winkel in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten, dessen Hypothenuse die Länge dieser Linie, dessen eine Kathete die horizontale Projektion derselben; und dessen andere Kathete die Entfernung des Endpunktes von der Projektionstafel ist. Da aber diese drei Seiten auch während und nach der Drehung dieselben bleiben, so bleibt der Winkel auch derselbe. Sodann ist dieselbe Gerade um den Punkt $(a' a_1)$ gedreht, bis sie parallel zur horizontalen Tafel ist, wobei ihre horizontale Projektion $a_1 b_2$ ist, und endlich ist dieselbe parallel zur zweit-vertikalen Tafel gelegt, wobei $a''_1 b_3$ ihre zweit-vertikale Projektion ist; mithin ist $< b_2 a_1 b'_1 = b''_3 a''_1 b''_1$ gleich dem Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel, und $< a_1 b_2 b'_2$ der Winkel, den diese Gerade mit der zweit-vertikalen Tafel bildet.

§. 99.

Aufgabe 5. Aus den Winkeln, die eine Gerade mit den Projektionstafeln bildet und den Projektionen eines auf ihr liegenden Punktes, ihre Projektionen zu bestimmen.

Auflösung. Da (§. 76.) parallele Gerade auch parallele Projektionen haben, so denken wir uns vor Allem die Gerade durch einen Punkt der Axe gezogen, bestimmen in dieser Lage derselben die Projektionen noch eines ihrer Punkte, ziehen dann durch diesen Punkt nach dem in der Axe angenommenen eine Gerade, mit dieser sodann durch den gegebenen Punkt eine Parallele gezogen, gibt die gesuchte Gerade.

(Fig. 66.) Ist nun in der Axe X ein Punkt a angenommen, durch welchen die gesuchte Gerade gehen soll, und wir wollten den Winkel suchen, den sie mit der vertikalen Tafel bildet, so müssten wir von a aus ein beliebiges Stück derselben abschneiden, dieses vertikal-projiciren, und es wird der Winkel, den diese vertikale Projektion mit der Geraden bildet, der gesuchte sein. Dieser Winkel ist also in dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Hypothenuse ein beliebig langer von a aus bezeichneter Theil der Geraden, dessen eine Kathete die Projektion dieses Theiles und dessen andere Kathete die vertikal-projicirende Linie ihres Endpunktes oder die horizontale Ordinate des letzteren ist. Da nun die Länge dieses Theiles der Geraden beliebig angenommen, mithin als bekannt vorausgesetzt werden kann, der Winkel v aber, den sie mit der vertikalen Tafel bildet gegeben ist; so kann dass genannte Dreieck konstruirt werden. Man denke sich dasselbe in die horizontale Tafel gelegt, dass der angenommene Theil L_2 der Geraden mit der Axe X den gegebenen Winkel v bildet, so wird ac' die Länge der vertikalen Projektion von L_2, $C_2 c'$ aber die horizontale Ordinate des Endpunktes C_2 der Geraden L_2 sein. Ebenso wird der Winkel h, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet, in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten sein, dessen Hypothenuse der Theil L_1, dessen eine dem Theile L_2 anliegende Kathete die horizontale Projektion von L_2, und dessen andere Kathete die horizontal-projicirende Linie des Endpunktes von L_2 oder seine vertikale Ordinate ist. Legt man also $L_1 = L_2$ in a an X unter dem Winkel h, und konstruirt das rechtwinklige Dreieck $a C_1 c$, so wird ac gleich der horizontalen Projektion von L_1 (oder L_2) sein.

Da nun ac gleich der horizontalen Projektion von L_2 ist, und diese horizontale Projektion durch den Punkt a der Geraden gehen muss, so wird der Endpunkt der horizontalen Projektion von L_2 von a so weit entfernt sein, als ac angibt, und mithin in dem Kreisbogen liegen, den man von a aus mit ac beschreibt. Da aber ferner $C_2 c'$ gleich der horizontalen Ordinate des Endpunktes von L_2 ist, so muss der Endpunkt der horizontalen Projektion dieser Geraden auch in der Parallelen liegen, die man in der Entfernung $C_2 c'$ mit X zieht. Es muss mithin die horizontale Projektion des Endpunktes der Geraden in dem Punkte liegen, in welchem der Kreisbogen von der durch C_2 mit X parallel gezogenen Geraden getroffen wird. Zieht man nun die Gerade ba, so ist diese die gesuchte horizontale Projektion von L_2. Um jetzt die vertikale Projektion der Geraden zu erhalten, kann man ent-

weder von b aus auf X eine Senkrechte, und in der Entfernung $C_1 c$ mit X eine Parallele ziehen, so wird in dem Durchschnittspunkte C' dieser beiden Geraden die vertikale Projektion des Endpunktes von L_2 sein; oder man kann ein ähnliches Verfahren einschlagen, wie bei der Aufsuchung der horizontalen Projektion. Zieht man nämlich aus a mit dem Halbmesser ac' einen Kreibogen, so muss in diesem die vertikale Projektion von C_1 (oder C_2) liegen, weil ac' gleich der vertikalen Projektion von L_2 (oder L_1) ist; die vertikale Projeklion dieses Endpunktes muss aber auch in der von C_1 aus in der Entfernung $C_1 c$ mit X parallel gezogenen Geraden liegen, weil $C_1 c$ die vertikale Ordinate dieses Punktes ist; mithin ist die vertikale Projektion dieses Punktes dort, wo die Parallele $C_1 b'$ den Kreisbogen 'c 'b trifft, also in 'b. Zieht man die Gerade ab', so ist diese die vertikale Projektion und ab ist die horizontale Projektion einer Geraden, welche die gegebenen Winkel mit den Projektionstafeln bildet. Legt man daher durch die vertikale Projektion jenes Punktes der Geraden mit a'b' und mit ab durch die horizontale Projektion jenes Punktes eine Parallele, so erhält man (§. 76.) die Projektionen derjenigen Geraden, die man suchte, und welche letztere mithin völlig bestimmt ist. —

Anmerkung. Ist einer dieser beiden Winkel ein rechter, so steht die Gerade auf der Tafel, mit der sie einen rechten Winkel bildet, senkrecht, und ist mithin parallel zur andern Tafel. In diesem Falle sind die Projektionen der Geraden also leicht zu bestimmen. Ist einer der Winkel gleich 0, der andere aber ein spitzer, so ist der Winkel, den sie mit der zweit-vertikalen Tafel bildet, auch spitz, und die beiden letzteren in Summe gleich einem rechten; die Gerade selbst ist aber parallel mit der Tafel, mit der sie einen Winkel von o Grad bildet. —

§. 100.

Aufgaben zur Uebung.

1. Aus den horizontalen Projektionen zweier Punkte und ihren vertikalen Ordinaten ihre übrigen Projektionen sowohl, als auch ihre Entfernung zu konstruiren. —
2. Aus den Coordinaten zweier Punkte einer Geraden (für die drei Tafeln) die Projektionen der Geraden und die Entfernung dieser beiden Punkte zu bestimmen.
3. Es ist die horizontale Spur einer Geraden, ein Punkt ihrer horizontalen Projektion und der Winkel gegeben, den die Gerade mit der horizontalen Tafel bildet; man soll ihre Projektionen bestimmen.
4. Die vertikale Projektion einer Geraden, ihr Winkel mit der vertikalen Tafel und ein Punkt ihrer vertikalen Projektion ist angegeben, man soll ihre Projektionen bestimmen. —
5. Die horizontale Spur einer Geraden, ein Punkt ihrer horizontalen Projektion und die Entfernung der horizontalen Spur von dem Punkte, dessen horizontale Projektion gegeben ist; man soll alles Uebrige bestimmen. —
6. Die horizontale Projektion eines Theiles einer Geraden ist gegeben, und der Winkel, den die Gerade mit der vertikalen Tafel bildet; man soll die andere Projektion der Geraden und den Winkel, den sie mit der horizontalen Tafel einschliesst, bestimmen. —

Anmerkung. In welchen Fällen die eine oder die andere dieser Aufgaben unmöglich wird, soll der Anfänger selbst bestimmen. —

§. 101.

Aufgabe 6. Es sind zwei sich schneidende Gerade gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche durch beide Gerade gelegt werden kann.

Auflösung. Nach §. 10. kann man durch zwei Gerade, die sich schneiden, eine Ebene legen, und es sind daher die Spuren dieser Ebene anzugeben. Nun sollen die beiden Geraden ganz und gar in der gesuchten Ebene liegen, mithin muss sich auch jede ihrer Spuren in der Ebene befinden. Die Spuren dieser Geraden liegen aber zugleich in den entsprechenden Projektionstafeln, nämlich die horizontalen Spuren dieser Geraden in der horizontalen Tafel und ihre vertikalen Spuren in der vertikalen Tafel; suchen wir daher diese Spuren der Geraden, so haben wir in jeder der beiden Projektionstafeln zwei Punkte, die auch in der Ebene liegen. Verbinden wir nun die vertikalen Spuren beider Geraden durch eine Gerade, so erhalten wir die vertikale Spur der Ebene, und die horizontalen Spuren beider Geraden verbunden, gibt die horizontale Spur der Ebene. Da nun von jeder dieser gegebenen Geraden zwei Punkte in der Ebene liegen, so müssen (§. 4.) diese beide Gerade ganz und gar in der Ebene enthalten sein, und mithin ist die Aufgabe gelöst. — Die zweit-vertikale Spur kann nach dem im §. 82. angegebenen Verfahren aus den beiden andern bestimmt werden. Man hätte dieselbe übrigens auch dadurch finden können, indem man die zweit-vertikalen Spuren beider Geraden gesucht, und diese durch eine Gerade verbunden hätte.

Anmerk. Zur Probe der gemachten Construktion dient der im §. 81. ausgesprochene Satz, dass nämlich

die Spuren einer Ebene in einem Punkte der Projektionsaxe zusammentreffen müssen,

§. 102.

(Fig. 67.) Ist b′c′ die vertikale Projektion der einen, bc ihre horizontale Projektion, ad die horizontale Projektion der zweiten, 'a'd' ihre vertikale Projektion, aa′ die Projektionen des Durchschnittspunktes beider Geraden, so findet man (§. 93.) die horizontale Spur der ersten c, c′, ihre vertikale Spur f, 'f; die horizontale Spur der zweiten in d, d′, ihre vertikale Spur in m, 'm. Die beiden horizontalen Spuren durch eine Gerade verbunden gibt die horizontale Spur E der Ebene, und die beiden vertikalen Spuren der Geraden durch eine Gerade verbunden, gibt die vertikale Spur 'E der Ebene, wobei 'E und E in einem Punkte der Axe X sich treffen müssen, wenn kein Zeichnungsfehler gemacht wurde. Die zweit-vertikale Spur "E kann nun leicht gefunden werden. —

§. 103.

Aufgabe 7. Es sind zwei parallele Gerade gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche diese beiden Geraden enthält.

Auflösung. Da nach §. 80. eine Ebene durch zwei ihrer Spuren der Lage nach bestimmt ist; so bestimmen wir die horizontale und vertikale Spur dieser Ebene. Nun soll jede der gegebenen Geraden ganz und gar in der Ebene liegen, folglich liegen auch die Spuren dieser Geraden in der gesuchten Ebene. Diese Spuren sind aber zugleich Punkte der Projektionstafeln, und es werden daher (§. 79.) die Spuren der Ebene durch dieselben gehen müssen. Um also die Aufgabe zu lösen, bestimmen wir die horizontalen Spuren beider Geraden, verbinden diese horizontalen Spuren durch eine Gerade, so wird letztere die horizontale Spur der Ebene sein. Suchen wir sodann die vertikalen Spuren beider Geraden, und verbinden dieselben durch eine Gerade; so erhalten wir die vertikale Spur der Ebene. Da von jeder der gegebenen Geraden zwei Punkte nun in der Ebene enthalten sind, so ist (§. 4.) jede dieser Geraden ganz und gar in der Ebene enthalten, und mithin (§. 11.) die Lage der Ebene völlig bestimmt. —

§. 104.

Beispiel. (Fig. 68.) Es sei $s_1 s_2$ die horizontale Projektion der ersten Geraden, $s'_1 s'_2$ ihre vertikale Projektion, $s_3 s_4$ die horizontale und $s'_3 s'_4$ die vertikale Projektion der zweiten Geraden; so suche man (§. 93.) die horizontale Spur s_1 der ersten und die horizontale Spur s_4 der zweiten Geraden, ziehe die Gerade $s_1 s_4$, so wird diese die horizontale Spur E der gesuchten Ebene sein. Sucht man auch (§. 93.) die vertikalen Spuren s'_2 und s'_3 beider Geraden, zieht $s'_2 s'_3$, so wird diese die vertikale Spur 'E der gesuchten Ebene sein. Beide Spuren müssen genugsam verlängert in einem Punkte der Axe zusammentreffen.

§. 105.

Aufgabe 8. Durch drei nicht in einer Geraden liegende und im Raume angegebene Punkte eine Ebene zu legen, und ihre Spuren zu bestimmen.

Auflösung. Verbindet man den ersten Punkt mit jedem der beiden andern durch Gerade, so erhält man zwei sich im ersten Punkte schneidende Gerade, auf welchen die beiden andern Punkte enthalten sind. Bestimmt man daher (§. 101.) die Spuren der Ebene, welche diese beiden Geraden enthält, so enthält diese Ebene auch die drei gegebenen Punkte. —

Beispiel. (Fig. 69.) Es seien a, a′ die Projektionen des ersten, b, b′ die Projektionen des zweiten, c, c′ die Projektionen des dritten Punktes, so hat man von einem Punkte, dessen Projektionen c, c′ sind, nach jedem der beiden anderen Gerade zu ziehen. Die Projektionen der einen dieser Geraden sind daher (§. 73.) c'a' und ca, die Projektionen der anderen sind 'cb' und cb. Sucht man nun (§. 93.) die horizontalen Spuren s_2, s_3 und die vertikalen Spuren $'s_1$, $'s_4$ dieser Geraden, zieht $s_2 s_3$ und $s'_1 s'_4$, so werden hierdurch die Spuren der Ebene erhalten, die in dem Punkte A der Axe X zusammentreffen müssen. —

§. 106.

Aufgabe 9. Es ist eine Gerade und ein Punkt ausserhalb der letzteren gegeben; man soll die Ebene bestimmen, welche durch beide gelegt werden kann.

Auflösung. Man kann hier eine der vorhergegangenen Aufgaben benützen zur Lösung dieser Aufgabe. Nimmt man nämlich (nach §. 73.) auf der Geraden einen Punkt an, verbindet denselben mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade, und legt nach §. 101. durch diese und die gegebene Gerade eine Ebene, so wird man die gesuchte Ebene erhalten. Man kann aber auch die Aufgabe dadurch lösen, indem man vom gegebenen Punkte aus mit der Geraden (nach §. 76.) eine Parallele zieht, also durch die vertikale Projektion des Punk-

tes eine Parallele zur vertikalen Projektion der Geraden, und durch die horizontale Projektion des Punktes eine Parallele zur horizontalen Projektion der Geraden zieht, sodann durch diese beiden Parallelen, deren Projektionen bekannt sind (nach §. 103.) eine Ebene legt, so wird diese die gesuchte sein. — Endlich kann man auf der gegebenen Geraden zwei Punkte durch ihre Projektionen (§. 73.) annehmen, von denselben aus (§. 72.) Gerade nach dem gegebenen Punkte ziehen, und durch dieselben (§. 101.) eine Ebene legen; so wird die gegebene Gerade sowohl, als auch der Punkt in dieser Ebene enthalten, und letztere völlig bestimmt sein. —

(Fig. 70.) Ist z. B. C die horizontale und C′ die vertikale Projektion des gegebenen Punktes, A B die horizontale und 'A B′ die vertikale Projektion der Geraden, so nehme man (§. 72.) auf letzterer einen Punkt durch seine Projektionen a, a′ an, ziehe von diesem aus nach dem Punkte C, C′ eine Gerade, deren Projektionen also (§. 72.) a C und a′'C sein werden. Sucht man nun die Spuren B und 'A der gegebenen Geraden, bestimmt sodann auch die der Hülfslinie a′'C, a C, verbindet die horizontalen Spuren beider Geraden sowohl, als auch ihre vertikalen Spuren durch gerade Linien, so erhält man die Spuren E und 'E der gesuchten Ebene. —

Anmerk. 1. Man wendet die eine oder die andere dieser Lösungen an, wenn man eine Ebene durch ihre Spuren bestimmen soll, und wählt jedenfalls jene, die am bequemsten ist. So wird man die erste Lösung anwenden, wenn die Spuren der Geraden noch auf den Projektionstafeln liegen; die letztere hingegen, wenn diess nicht der Fall ist. —

Anmerk. 2. Ist eine der gegebenen Geraden, durch welche eine Ebene gelegt werden soll, senkrecht auf einer Tafel, so wird (§. 45.) die Ebene auf derselben Projektionstafel senkrecht sein. — Soll durch zwei Gerade, die sich schneiden, oder unter sich parallel sind, eine Ebene gelegt werden, und sind beide Linien parallel mit einer Projektionstafel, so wird die Ebene (§. 36.) mit derselben Tafel parallel sein. —

§. 107.

Aufgabe 10. Es ist eine Ebene durch ihre Spuren gegeben, ferner die horizontale Projektion eines auf der Ebene sich befindenden Punktes; man soll seine vertikale Projektion bestimmen.

Auflösung. Denkt man sich die Ebene durch ihre Spuren erzeugt, und nimmt zu diesem Zwecke die horizontale Spur der Ebene als Generatrix, und ihre vertikale Spur als Direktrix an, so wird (§. 5.) die Generatrix parallel mit der horizontalen Spur, also auch (§. 29.) mit der horizontalen Tafel parallel bleiben, und die vertikale Spur treffen. Die Generatrix wird aber auch bei ihrer Bewegung einmal durch den anzugebenden Punkt gehen, folglich (§. 72.) die horizontale Projektion dieser Lage der Generatrix durch die gegebene horizontale Projektion des Punktes gehen. Da nun dieselbe parallel zur horizontalen Spur ist, so wird ihre horizontale Projektion parallel zur horizontalen Spur, ihre vertikale Projektion parallel zur Axe (§. 76.) sein. Zieht man daher durch die gegebene horizontale Projektion des Punktes eine Parallele zur horizontalen Spur der Ebene, so wird diese die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix sein, welche durch den Punkt geht. Verlängert man nun diese horizontale Projektion bis zur Axe, so erhält man im Durchschnittspunkte mit letzterer die horizontale Projektion der vertikalen Spur dieser Generatrix (§. 93). Die vertikale Spur selbst liegt in der vertikalen Spur der Ebene, weil die Generatrix diese stets trifft. Zieht man daher (§. 63.) von der horizontalen Projektion dieser vertikalen Spur auf X eine Senkrechte, und verlängert dieselbe, bis sie von der vertikalen Spur der Ebene getroffen wird, so erhält man in diesem Durchschnittspunkte die vertikale Spur, und durch diese eine Parallele zur Axe gezogen, gibt die vertikale Projektion der Generatrix. Da nun die gesuchte vertikale Projektion des Punktes (§. 63.) mit der horizontalen Projektion in einer auf X senkrecht stehenden Geraden, und (§. 72.) in der vertikalen Projektion der erwähnten Lage der Generatrix liegen muss, so wird die vertikale Projektion des Punktes im Durchschnitte der vertikalen Projektion der Generatrix mit der Senkrechten liegen, die man von seiner horizontalen Projektion aus auf X zieht, und kann mithin leicht gefunden werden. Die ganze Lösung dieser Aufgabe besteht also darin, dass man diejenige Lage der Generatrix der Ebene projicirt, die durch den gegebenen Punkt geht, sodann auf dieser Linie (§. 73.) die vertikale Projektion des Punktes bestimmt, dessen horizontale Projektion angegeben ist. —

Anmerk. 1. Auf gleiche Weise würde man verfahren, wenn die vertikale Projektion des Punktes gegeben, seine horizontale Projektion aber gesucht wäre. Man kann hierbei die horizontale Spur der Ebene als Generatrix und sodann ihre vertikale Spur als Direktrix, oder die vertikale Spur als Generatrix, und die horizontale Spur als Direktrix betrachten, und nach der in dem letzten §. angegebenen Lösung diejenige Lage der Generatrix projiciren, welche durch den Punkt geht, dessen vertikale oder horizontale Projektion gegeben ist. —

Anmerk. 2. Wäre die horizontale und vertikale Ordinate des Punktes gegeben, der in der Ebene liegen soll, so lege man — die horizontale Spur der Ebene als Generatrix derselben betrachtend — in der Entfernung, welche die vertikale Ordinate des Punktes angibt, eine Ebene parallel zur horizontalen Tafel, so ist diese die

vertikal - projicirende Ebene der Generatrix, weshalb also ihre vertikale Spur auch durch die vertikale Projektion des gesuchten Punktes (§. 83.) gehen muss. Diese vertikale Spur ist aber (§. 83.) eine in der vertikalen Tafel parallel zur X gezogene Gerade, die von X um die vertikale Ordinate des Punktes absteht, und ist mithin die vertikale Projektion der gesuchten Lage der Generatrix. Die horizontale Projektion dieser Lage der Generatrix kann nun leicht gefunden werden, weil ihre Richtung und die vertikale Spur der Generatrix bekannt ist, und auf dieser horizontalen Projektion kann nun nach §. 73. die horizontale Projektion des gesuchten Punktes angegeben werden. —

§. 108.

Beispiel 1. (Fig. 71.) Ist E die horizontale, 'E die vertikale und "E die zweit-vertikale Spur einer Ebene, a die horizontale Projektion eines Punktes in der Ebene, dessen vertikale Projektion gesucht werden soll; so ziehe man (§. 107.) durch a die Gerade ab parallel mit E, von b aus auf X die Gerade bb' senkrecht; sodann von 'b mit X die Gerade 'ab' parallel, und endlich von a aus auf X eine Senkrechte, die in 'a von 'a'b durchschnitten wird, wodurch man sodann in 'a die vertikale Projektion des Punktes erhält. Dabei ist E die Generatrix und 'E Direktrix der Ebene, ab die horizontale und 'a'b die vertikale Projektion derjenigen Lage dieser Generatrix, die durch den gesuchten Punkt geht. Betrachtet man 'E als Generatrix, so wird die horizontale Projektion jeder Lage derselben parallel mit X sein, und man hat mithin durch a eine Parallele ac mit X zu ziehen, um die horizontale Projektion dieser bestimmten Lage zu erhalten. Zieht man nun von c aus auf X die Senkrechte c'c, von 'c aus mit 'E die Parallele 'c'a, so wird im Durchschnitte 'a mit der auf X senkrecht stehenden Geraden a'a die vertikale Projektion des gesuchten Punktes sein. Die zweit-vertikale Projektion kann man entweder nach §. 67. oder dadurch finden, dass man die vertikale Projektion einer Generatrix der Ebene aufsucht. Hier ist a"b" die zweit-vertikale Projektion der durch a,'a gehenden Lage der Generatrix, die mit E parallel ist, und mithin in "a, dem Durchschnittspunkte von sa" mit b"a" die zweit-vertikale Projektion des Punktes. — Ist die vertikale Projektion 'a des Punktes angegeben, so ziehe man — die horizontale Spur der Ebene als Generatrix betrachtend — 'ab' parallel mit X, von 'b auf X die Senkrechte 'bb, durch b mit E die Parallele ba, so wird in a dem Durchschnittspunkte von ba mit a'a die horizontale Projektion des Punktes sein. Oder man ziehe von 'a mit 'E die Parallele 'a'c, von 'c aus auf X die Senkrechte 'cc, durch c mit X die Parallele ca, so ist wieder in a dieselbe horizontale Projektion. —

Beispiel 2. (Fig. 71.) Es sei A die horizontale und 'A die vertikale Projektion eines Punktes, der in derselben Entfernung von den beiden Projektionstafeln bleibend, verschoben werden soll, bis er in der Ebene liegt; so ziehe man 'A'b und Aa parallel mit X, betrachte 'A' als vertikale Projektion einer Lage der Generatrix — die horizontale Spur der Ebene als Generatrix — so wird ihre horizontale Projektion durch b gehen und parallel mit E, folglich ba sein. Im Durchschnittspunkte a von ba mit Aa ist mithin die horizontale Projektion, und folglich in 'a, dem Durchschnittspunkte von a'a mit A'a die vertikale Projektion des gesuchten Punktes. — Betrachtet man Aa als horizontale Projektion einer Lage der Generatrix — folglich "E als Generatrix — so wird c'a' die vertikale Projektion derselben, und mithin in a', dem Durchschnittspunkte von 'Aa' mit 'ac' die vertikale Projektion des Punktes sein, dessen horizontale Projektion a nach §. 73. gefunden werden kann.

Beispiel 3. (Fig. 72.) Ist E die horizontale, 'E die vertikale und "E die zweit-vertikale Spur einer Ebene, abcde die horizontale Projektion eines Fünfeckes, das in der Ebene liegt, und man soll seine vertikale Projektion finden; so wiederhole man das im vor. §. angegebene Verfahren mehrmal. Man denke sich nämlich durch die einzelnen Punkte, deren horizontale Projektionen a, b, c, d, e sind, einzelne Lagen der Erzeugenden gezogen (betrachte dabei die horizontale Spur als Generatrix), ziehe aa, $\neq$ bb, $\neq$ cc, $\neq$ dd, $\neq$ ee, $\neq$ E, so erhält man die horizontalen Projektionen dieser einzelnen Lagen der Erzeugenden. Da nun a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 die horizontalen Projektionen ihrer vertikalen Spuren sind, so sind diese letzteren durch die Senkrechten $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$, $d_1d'_1$, $e_1e'_1$ bestimmt, und müssen in a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1 sein. Zieht man also die mit X parallelen Geraden a_1a', b_1b', c_1c', d_1d', e_1e', so erhält man die vertikalen Projektionen dieser einzelnen Lagen der Erzeugenden, und mithin werden die vertikalen Projektionen der Scheitel des Fünfeckes (§. 72.) durch die auf X senkrecht stehenden Geraden aa', bb' etc. etc. bestimmt, und in a', b', c', d', e' sein, und es ist also a'b'c'd'e' die vertikale Projektion des Fünfeckes. Die zweit-vertikale Projektion a"b"c"d"e" kann entweder auf ähnliche Weise oder nach einem früher (§. 67.) angegebenen Verfahren bestimmt werden. —

§. 109.

Aufgabe 11. Es sind zwei Gerade (durch ihre Projektionen) angegeben; man soll durch eine derselben eine Ebene legen, die parallel zur zweiten ist.

Auflösung. Nimmt man auf der einen dieser Geraden einen Punkt (§. 72.) durch seine Projektionen an, legt durch denselben eine Gerade parallel zur zweiten, indem man (§. 76.) durch die vertikale Projektion des Punktes eine Parallele zur vertikalen Projektion, und durch die horizontale Projektion des Punktes eine Parallele zur horizontalen Projektion der Geraden zieht, und bestimmt nun (§. 101.) die Ebene, welche diese Parallele und die erste Gerade enthält, so wird diese Ebene (§. 29.) auch parallel zur zweiten Geraden und mithin die gesuchte sein. —

Beispiel. (Fig. 73.) Es sei L_1 die horizontale, $'L_1$ die vertikale Projektion einer Geraden, L_2 die horizontale und $'L_2$ die vertikale Projektion einer andern Geraden: man soll durch L_1, $'L_1$ eine Ebene parallel mit L_2, $'L_2$ legen. Nimmt man (§. 72.) in m die horizontale und in m′ die vertikale Projektion eines Punktes an, zieht $m, s_1 \neq L_1$, $m's'_1 \neq 'L_1$, so wird die Gerade, deren Projektionen ms_1, $m's'_1$ sind, parallel mit der Geraden L_1, $'L_1$ sein. Sucht man nun die horizontale Spur s_2 der ersten Geraden und die horizontale Spur s_3 der Geraden ms, m′s′₁ (§. 93.), so muss $s_2 s_3$ die horizontale Spur E der gesuchten Ebene sein, deren vertikale Spur (§. 81.) durch S gehen muss. Bestimmt man nun die vertikale Spur s'_1 der Geraden ms, m′s′₁ (nach §. 93.), zieht Ss'_1, so erhält man auch die vertikale Spur 'E der gesuchten Ebene.

§. 110.

Aufgabe 12. Die Communsektion zweier durch ihre Spuren angegebene Ebenen zu bestimmen.

Auflösung. (Fig. 74.) Ist E_1 die horizontale, E'_1 die vertikale und $''E_1$ die zweit-vertikale Spur der einen, E_2 die horizontale, $'E_2$ die vertikale und $''E_2$ die zweit-vertikale Spur der andern Ebene, so verlängere man die Spuren in einer und derselben Tafel, bis sie sich schneiden, und man erhält hierdurch im Durchschnitte der vertikalen Spuren einen Punkt a'_1, welcher beiden Ebenen angehört, weil er sich auf ihren Spuren befindet. Aus demselben Grunde ist der Durchschnittspunkt a_2 der beiden horizontalen Spuren ein Punkt beider Ebenen, also ein Punkt ihrer Communsektion. Nun liegt aber der Punkt a'_1 in der vertikalen und a_2 in der horizontalen Tafel, folglich ist a'_1 die vertikale und a_2 die horizontale Spur der gesuchten Communsektion. Um daher die Communsektion beider Ebenen durch ihre Projektionen anzugeben, verfahre man nach §. 96., so erhält man C die horizontale und 'C die vertikale Projektion der Communsektion, deren zweit-vertikale Projektion ''C entweder nach §. 67. oder ebenso gefunden werden kann, wie die beiden übrigen Projektionen bestimmt wurden. **Schneiden sich also die horizontalen Spuren sowohl, als auch die vertikalen Spuren beider Ebenen, so erhält man sogleich die horizontale und vertikale Spur der Communsektion, und kann also (§. 96.) die Projektionen derselben bestimmen.** Ebenso leicht würde diess geschehen können, wenn sich statt der vertikalen oder horizontalen die zweit-vertikalen Spuren beider Ebenen schneiden würden. —

Anmerk. Nicht immer liegen die Ebenen gegen die Projektionstafeln so, dass sich ihre Spuren schneiden; indem die Durchschnittspunkte derselben weit über die Gränzen unserer Tafeln liegen, oder die Spuren in einer Tafel parallel, in der andern aber sich schneiden können, wenn man dieselben genugsam verlängert. Wir wollen daher in den folgenden Paragraphen einzelne dieser Fälle betrachten, und ihre Auflösung zeigen. —

§. 111.

Beispiel 1. (Fig. 75.) E_1 sei die horizontale und E'_1 die vertikale Spur der einen, E_2 und $'E_2$ die Spuren der andern Ebene, man soll die Communsektion beider Ebenen bestimmen. Man verfahre hierbei wieder genau nach der im vor. §. angegebenen Regel: verlängere nämlich die horizontalen Spuren, so werden sich dieselben in a_2 schneiden, und suche den Durchschnittspunkt a'_1 der vertikalen Spuren. Letzterer befindet sich noch auf dem oberhalb der horizontalen Tafel liegenden Theil der vertikalen Tafel, ersterer aber liegt in der rückwärtigen Verlängerung beider Tafeln. Projicirt man nun a_2, so wird dessen vertikale Projektion (§. 70.) in a'_2, seine horizontale Projektion aber a_2 selbst sein. Die horizontale Projektion von a'_1 ist (§. 70.) in a_1, dem Endpunkte der Senkrechten $a'_1 a_1$, weshalb also (§. 96.) $a_1 a_2$ oder C die horizontale, $a'_2 a'_1$ oder 'C die vertikale Projektion der Communsektion sein wird, von welcher der Theil, dessen Projektionen $a_2 a_1$ und $a'_2 a'_1$ sind, im zweiten Quadranten liegt. —

Beispiel 2. (Fig. 76.) Hier schneiden sich die horizontalen Spuren E_1 und E_2 in a_2, einem Punkte desjenigen Theiles der horizontalen Tafel, der vor der vertikalen Tafel liegt, der Durchschnittspunkt a'_1 der beiden vertikalen Spuren aber

liegt in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel. Projicirt man nun (§. 70.) diese Punkte, so ist in a'_2 die vertikale Projektion von a_2, in a_1 die horizontale Projektion von a'_1; mithin (§. 72.) $a_2 a_1$ die horizontale und $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion der Communsektion. Der Theil von letzterer, dessen Projektionen $a_2 a_1$ und $a'_2 a'_1$ sind, liegt im vierten Quadranten.

Beispiel 3. (Fig. 77.) Ist E_1 die horizontale, $'E_1$ die vertikale Spur der einen, E_2 die horizontale, $'E_2$ die vertikale Spur der andern Ebene, und schneiden sich die horizontalen Spuren in dem Punkte a_1, der in der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel liegt, und die vertikalen Spuren in dem Punkte $'a_2$ in der rückwärtigen Verlängerung der vertikalen Tafel, so ist (§. 70.) in $'a_1$ die vertikale Projektion von a_1 und a_2 die horizontale Projektion von a'_2, mithin $a_1 a_2$ oder C die horizontale und $a'_1 a'_2$ oder $'C$ die vertikale Projektion der Communsektion. Der Theil von letzterer, der zwischen den Durchschnittspunkten der Spuren liegt, befindet sich im dritten Quadranten. —

Beispiel. 4. (Fig. 80.) Liegen beide Ebenen so gegen die Tafeln, dass ihre vertikalen Spuren sowohl, als auch ihre horizontalen Spuren in einem Punkte S_1 der Axe X zusammentreffen, so bestimme man (§. 82.) ihre zweit-vertikalen Spuren $S'_1 S''_1$ und $'S_2 S''_2$, suche den Durchschnittspunkt a'' der letzteren, bestimme (§. 70.) die vertikale Projektion a' und die horizontale Projektion a desselben, ziehe $S_1 a'$, $S_1 a$, so erhält man die vertikale und horizontale Projektion der Communsektion (§. 72.). Da (§. 70.) die zweit-vertikale Projektion von S_1 oder S_2 in O sein muss, so wird Oa'' die zweit-vertikale Projektion der Communsektion sein. —

Anmerk. In allen diesen Beispielen hat man durch Verlängerung der gleichnamigen Spuren der Ebene die Spuren ihrer Communsektion, und letztere sodann (§. 96.) bestimmt. —

§. 112.

Es soll nun die Communsektion zweier Ebenen gefunden werden, wenn die Spuren einer Tafel sich noch auf letzterer schneiden, die Spuren der andern Tafel aber parallel sind. —

Beispiel 1. (Fig. 78.) Die vertikalen Spuren $'E_1$ und $'E_2$ schneiden sich in a'; die horizontalen Spuren E_1 und E_2 sind unter sich parallel. Betrachtet man die horizontalen Spuren beider Ebenen als ihre Erzeugungslinien, und denkt sich dieselben fortbewegt, bis sie durch den Punkt a' gehen, so werden dieselben, wenn sie durch diesen Punkt gehen, in eine Gerade zu liegen kommen, weil sie beide (§. 28.) unter sich parallel sind. Diese beiden Geraden müssen aber sodann auch in beiden Ebenen zugleich liegen, und bilden daher die Communsektion der Ebenen. Es ist also die Communsektion dieser beiden Ebenen (von welchen die horizontalen Spuren parallel sind) mit den horizontalen Spuren und mit der horizontalen Tafel parallel. Nun ist die vertikale Projektion einer jeden horizontalen Spur in X, folglich muss (§. 76.) die vertikale Projektion der Communsektion parallel mit X und ihre horizontale Projektion parallel mit E_1 und E_2 sein. Es muss aber auch die vertikale Projektion der Communsektion (§. 72.) durch $'a$ und ihre horizontale Projektion durch a gehen; zieht man daher $'a\,'C$ parallel X und aC parallel E_1 oder E_2, so erhält man die beiden Projektionen der Communsektion. —

Beispiel 2. (Fig. 79.) Es seien die vertikalen Spuren $'E_1$ und $'E_2$ wieder parallel unter sich und zugleich senkrecht auf X, die horizontalen Spuren E_2 und E_1 schneiden sich in a, so ist a ein Punkt der horizontalen und $'a$ ein Punkt der vertikalen Projektion der Communsektion. Nun müssen aber (§. 83.) beide Ebenen senkrecht auf der horizontalen Tafel, und mithin auch (§. 48.) ihre Communsektion senkrecht auf dieser Tafel stehen. Da aber a die horizontale Spur dieser Communsektion ist, so ist (§. 74.) a zugleich ihre horizontale Projektion, und zieht man $a\,a'C$ senkrecht auf X, so wird (§. 70.) die vertikale Projektion von a in a' und (§. 74.) $a'\,'C$ die vertikale Projektion der Communsektion sein. —

Beispiel 3. (Fig. 81.) Die horizontalen Spuren beider Ebenen seien E_1 und E_2, die vertikalen Spuren seien $'E_1$ und $'E_2$ und die zweit-vertikalen Spuren (§. 82.) $''E_1$ und $''E_2$. Ferner seien die horizontalen und die vertikalen Spuren mit X parallel, so ist (§. 83.) jede dieser Ebenen parallel mit X und senkrecht auf der zweit-vertikalen Tafel. Da nun diese beiden Ebenen senkrecht auf der zweit-vertikalen Tafel sind, so ist (§. 48.) auch ihre Communsektion auf dieser Tafel senkrecht. Der Durchschnittspunkt c'' der beiden zweit-vertikalen Spuren ist aber die zweit-vertikale Spur der Communsektion, folglich ist c'' (§. 74.) die zweit-vertikale Projektion der Communsektion. Nach §. 70. ist c' die vertikale und c die horizontale Projektion von ''c, und nach §. 76. muss daher C' die vertikale und C die horizontale Projektion der Communsektion sein. —

§. 113.

Endlich soll durch einige Beispiele noch gezeigt werden, wie man die Projektionen zweier

Punkte der Communsektion erhalten kann, wenn die vertikalen Spuren oder die horizontalen Spuren sich auf unsern Zeichnungstafeln nicht mehr schneiden.

Beispiel 1, (Fig. 82.) Die vertikalen Spuren $'E_1$ und $'E_2$ zweier Ebenen schneiden sich in a'_1, ihre horizontalen Spuren schneiden sich aber auf den Tafeln nicht mehr. Vor Allem hat man in a'_1 die vertikale und (§. 70.) in a_1 die horizontale Projektion eines Punktes der Communsektion. Um nun die Projektionen eines zweiten Punktes derselben zu bestimmen, betrachte man $'E_1$ als Erzeugende der einen und $'E_2$ als Erzeugende der andern Ebene, und projicire zwei solche Erzeugende der Ebenen, die sich schneiden, so werden die Projektionen ihres Durchschnittspunktes einem in beiden Ebenen zugleich enthaltenen Punkte, also einem Punkte der Communsektion angehören. Zu diesem Zwecke ziehe man eine Ebene parallel mit der vertikalen Tafel (also senkrecht auf die horizontale Tafel), so wird die horizontale Spur $g_1 g_2$ dieser Ebene erstens parallel mit X sein müssen, und (§. 73.) die horizontale Projektion jeder Geraden sein, die in dieser Ebene liegt. Man kann daher $g_1 g_2$ als horizontale Projektion zweier Geraden betrachten, von welchen die eine, eine Lage der Erzeugenden von $E_1 S_1 'E_1$ und die andere eine Lage der Erzeugenden von $E_2 S_2 'E_2$ ist, so wird g_1 die horizontale Spur der einen und g_2 die horizontale Spur der andern Erzeugenden sein, deren vertikale Projektionen (§. 70.) in g'_1 und g'_2 sein müssen. Zieht man daher $g'_1 a'_1 \neq E'_1$ und $g'_2 a'_2 \neq 'E_2$, so erhält man (§. 107.) die vertikalen Projektionen dieser Erzeugenden, die sich in $'a_2$ der vertikalen Projektion des Durchschnittspunktes der Erzeugenden schneiden müssen. Zieht man nun $a'_2 a_2$ senkrecht auf X, so erhält man (§. 70.) die horizontale Projektion a_2 des Durchschnittspunktes beider Erzeugenden, und zieht man ferner die Geraden $a_1 a_2$ und $a'_1 a'_2$, so sind dieselben die Projektionen der gesuchten Communsektion. —

Beispiel 2. (Fig. 83.) Hier schneiden sich die horizontalen Spuren noch auf den Tafeln, die vertikalen Spuren aber nicht, man hat also a_1 die horizontale und a'_1 die vertikale Projektion eines Punktes der Communsektion. Um noch einen zweiten Punkt zu erhalten, ziehe man $g'_1 g'_2 \neq X$, betrachte diese Gerade als gemeinschaftliche vertikale Projektion zweier Erzeugenden der Ebenen, so werden sich dieselben schneiden, weil sie eine einzige vertikal-projicirende Ebene haben, also in einer Ebene liegen. Da in g'_1 die vertikale Spur der einen Erzeugenden und in g'_2 die vertikale Spur der anderen ist, so werden die horizontalen Projektionen dieser Erzeugenden erhalten, wenn man die horizontalen Projektionen g_1 und g_2 von g'_1 und g'_2 bestimmt, sodann $g_1 a_2 \neq S_1 a_1$ und $g_2 a_2 \neq S_2 a_1$ zieht. Diese horizontale Projektionen schneiden sich in a_2, welcher Punkt die horizontale Projektion des Durchschnittspunktes der Erzeugenden im Raume, und dessen vertikale Projektion a'_2 ist. Zieht man also $a_1 a_2$ und $a'_1 a'_2$, so erhält man die horizontale und vertikale Projektion der Communsektion. —

Beispiel 3. (Fig. 84.) Es schneiden sich weder die vertikalen noch die horizontalen Spuren beider Ebenen auf den begränzten Projektionstafeln; man soll die Projektionen der Communsektion angeben.

Ist $E_1 S_1 'E_1$ die eine, $E_2 S_2 'E_2$ die andere Ebene, so nehme man in so grosser Entfernung von der horizontalen Tafel, als es thunlich ist, eine Ebene parallel zu derselben an, denke sich in derselben eine Lage der Erzeugenden der einen und eine Lage der Erzeugenden der andern Ebene gezogen, so wird die vertikale Spur g', g'_2 jener Hülfsebene die gemeinschaftliche vertikale Projektion beider Erzeugenden sein. Da man hierbei die horizontalen Spuren beider Ebenen als ihre Erzeugungslinien angenommen hat, so wird g'_1 die vertikale Spur der angenommenen Lage der Erzeugenden für Ebene $E_2 S_2 'E_2$, und mithin die von g_r mit E_2 parallel gezogene Gerade die horizontale Projektion dieser Lage der Erzeugenden sein. Ebenso erhält man die horizontale Projektion der angenommenen Lage der Erzeugenden von Ebene $E_1 S_1 'E_1$, wenn man $g_2 a_1 \neq E_1$ zieht. Diese beiden Lagen der Erzeugenden beider Ebenen werden sich schneiden als Gerade, die in einer Ebene liegen, und man erhält daher in a_1 die horizontale und in a'_1 die vertikale Projektion ihres Durchschnittspunktes. Nimmt man ebenso eine zweite Ebene an parallel mit der horizontalen Tafel, und denkt sich in dieser eine Lage der Erzeugenden von einer und eine solche von der andern Ebene gezogen, so werden dieselben eine gemeinschaftliche vertikale Projektion haben müssen, und diese sei $g'_3 g'_4$. Hierzu findet man $g_3 a_2$ die horizontale Projektion für die Lage der Erzeugenden einer Ebene und $g_4 a_2$ die horizontale Projektion der Lage der Erzeugenden von der andern Ebene. Diese beiden Erzeugenden müssen sich schneiden, und es ist mithin a_2 die horizontale Projektion ihres Durchschnittspunktes, dessen vertikale Projektion (§. 73.) in a'_2 sein wird. Da nun sowohl $a_1 a'_1$, als auch $a_1 a'_2$ der Ebene angehört, so wird $a_1 a_2$ die horizontale und $a'_1 a'_2$ die vertikale Projektion

der Communsektion sein. Die Auflösung eines Falles dieser Art besteht also darin, dass man zwei Lagen der Erzeugungslinien beider Ebenen konstruirt, die sich schneiden, wodurch sodann ein Punkt der Communsektion erhalten wird. Sodann wiederholt man dieses Verfahren, um noch einen zweiten Punkt der Communsektion zu erhalten, verbindet beide Punkte durch eine Gerade, so erhält man die Communsektion beider Ebenen. —

§. 114.

Aufgabe 13. Den Durchgangspunkt einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen, wenn die Gerade durch ihre Projektionen und die Ebene durch ihre Spuren angegeben ist.

Auflösung. Legt man durch die Gerade eine beliebige Ebene, so wird diese die gegebene Ebene schneiden müssen. Die Communsektion dieser beiden Ebenen wird von der gegebenen Geraden geschnitten, weil letztere und jene Communsektion in der Hülfsebene liegen, und nicht parallel sein können. Dieser Durchschnittspunkt der Communsektion und der gegebenen Geraden gehört nun sowohl der gegebenen Ebene, als auch der Geraden an, und ist mithin der gesuchte Durchschnittspunkt. Man wird daher bei der Auflösung dieser Aufgabe auf folgende Weise verfahren:

1. Suche man (nach §. 93.) die Spuren der Geraden.
2. Nehme man eine Spur der Hülfsebene beliebig an, z. B. die horizontale Spur; indem man durch die horizontale Spur der Geraden eine Gerade zieht, die sowohl die Axe, als auch die horizontale Spur der gegebenen Ebene trifft.
3. Ziehe man vom Durchschnittspunkte der horizontalen Spur der Hülfsebene mit der Axe nach der vertikalen Spur der Geraden eine gerade Linie, so erhält man (§. 80.) die vertikale Spur der Hülfsebene.
4. Bestimme man (§. 110.) die Communsektion zwischen der gegebenen und der Hülfsebene, so müssen (§. 77.) die Projektionen derselben von den Projektionen der gegebenen Geraden geschnitten werden. Diese Durchschnittspunkte beider Projektionen sind die Projektionen des gesuchten Durchgangspunktes. —

Anmerk. 1. Da die Hülfsebene nur die gegebene Gerade enthalten soll, und ausserdem willkührlich gewählt werden kann, so wird man dieselbe so nehmen, dass man ihre Communsektion mit der gegebenen Ebene leicht bestimmen kann. Man kann daher zur Vereinfachung der Construktion auch eine der projicirenden Ebenen der gegebenen Geraden benützen, welche leicht aufzusuchen ist, indem eine Projektion der Geraden schon eine Spur dieser Hülfsebene und ihre andere Spur senkrecht auf der Axe (§. 83.) sein muss. —

Anmerk. 2. Liegt die Gerade so, dass ihre Projektionen die Axe nicht auf den Tafeln schneiden, so nehme man ausserhalb der Geraden einen Punkt an, ziehe durch diesen (mit Benützung des in §. 77. angegebenen Satzes) zwei Gerade so, dass sie die gegebene Gerade schneiden. Legt man durch jene zwei Gerade eine Ebene, und sucht ihre Communsektion mit der gegebenen Ebene auf, so erhält man den gesuchten Durchgangspunkt. —

§. 115.

Beispiel 1. (Fig. 85.) Es sei EA'E die gegebene Ebene und L'L die Gerade; man soll den Durchgangspunkt der letzteren mit der Ebene bestimmen. Man suche (nach 93.) die horizontale Spur C und die vertikale B' der Geraden, ziehe eine beliebige Gerade CG, und nehme diese als horizontale Spur der Hülfsebene an, so wird FBH die vertikale Spur der letzteren sein. Nun ziehe man HG und HG', so erhält man (§. 110.) die Projektionen der Communsektion, und es wird daher der Durchschnittspunkt von H'G' mit L', nämlich D' die vertikale und der Durchschnittspunkt von HG mit L, nämlich D die horizontale Projektion des gesuchten Durchgangspunktes sein. —

Beispiel 2. (Fig. 86.) Es sei wieder L'L die Gerade und EAE' die gegebene Ebene, so wird man hier die in Anmerkung 1. des vor. §. angegebene Regel anwenden, und als Hülfsebene die horizontal-projicirende Ebene der Geraden L'L benützen. Für diese Hülfsebene ist also S_1S_2 die horizontale und die auf X senkrecht gezogene Gerade $S_2{}'S_2$ die vertikale Spur. Bestimmt man (§. 70.) die vertikale Projektion $'S_1$ von S_1, zieht die Geraden S_1S_2 und $'S_2{}'S_1$, so werden diese (nach §. 110.) die Projektionen der Communsektion, und mithin die Durchschnittspunkte D, 'D dieser Projektionen mit den Projektionen L, 'L der Geraden die Projektionen des gesuchten Durchgangspunktes sein. —

Beispiel 3. (Fig. 87.) Sind die beiden Spuren E, 'E der gegebenen Ebene parallel mit X, L, 'L die Projektionen der Geraden, so kann man eine der projicirenden Ebenen der letzteren benützen, um ihren Durchgangspunkt mit der gegebenen Ebene zu erhalten. Nimmt man L als horizontale Spur der Hülfsebene an, so wird die zugehörige vertikale Spur (§. 83.) senkrecht auf X, und mithin BB' sein. Der Durchschnittspunkt B' von B'B mit 'E ist die vertikale und der Durch-

schnittspunkt H von L mit E ist die horizontale Spur der Communsektion (§. 110.), folglich (§. 96.) B′H′ die vertikale und BH die horizontale Projektion derselben. Nun wird 'L von B′H′ in 'D durchschnitten, folglich ist 'D die vertikale Projektion des Durchgangspunktes, dessen horizontale Projektion D nach §. 72. bestimmt werden muss.— Man hätte hier auch die vertikal-projicirende Ebene der Geraden benützen können, um die Projektionen D, D′ des Durchgangspunktes zu erhalten. Die Construktion ist eine ähnliche, und man kann dieselbe aus der Figur ersehen. —

Beispiel 4. (Fig. 88.) Es sei ES'E die gegebene Ebene, 'B'A sei die vertikale, S die horizontale Projektion einer Geraden, die senkrecht auf der horizontalen Tafel steht. Legt man durch diese Gerade eine Hülfsebene, so muss dieselbe (§. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen. Ist also AC die horizontale Spur dieser Hülfsebene, so muss (§. 85.) ihre vertikale Spur die von C auf X gezogene Senkrechte C'C sein. Bestimmt man nach §. 110. die Communsektion von Ebene FC'C und 'ESE, so wird die vertikale Projektion 'CF′ derselben die vertikale Projektion 'A'B der Geraden in 'D schneiden, welcher Punkt die vertikale Projektion des Durchgangspunktes sein muss. Die horizontale Projektion dieses Punktes fällt (§. 75.) mit A zusammen; mithin ist A die horizontale und 'D die vertikale Projektion des Durchgangspunktes. —

Beispiel 5. (Fig. 89.) EA'E sei die gegebene Ebene, L'L die Gerade, von welcher der Durchgangspunkt mit Ebene EA'E bestimmt werden soll. Da die Projektionen dieser Geraden die Axe X auf den Tafeln nicht mehr schneiden, so nehme man ausserhalb der Geraden einen Punkt pp′ an, lege durch diesen und die Gerade eine Ebene, so werden die Spuren der letzteren T und T″ sein. Nach §. 110. die Communsektion ab, a′b′ zwischen der gegebenen und der Hülfsebene bestimmt; so erhält man im Durchschnitte von 'a'b mit 'L die vertikale und im Durchschnitte von ab mit L die horizontale Projektion des Durchgangspunktes, und es sind also D und 'D die Projektionen des gesuchten Punktes. —

§. 116.

Aufgabe 14. Es sei eine Ebene und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben; man soll die Entfernung dieses Punktes von der Ebene bestimmen.

Auflösung. Nach (§. 17.) ist der Abstand eines Punktes von einer Ebene die Senkrechte, welche man vom Punkte auf die Ebene ziehen kann. Man ziehe deshalb durch die vertikale Projektion des Punktes eine Senkrechte auf die vertikale Spur und von der horizontalen Projektion des Punktes aus eine Senkrechte auf die horizontale Spur der Ebene, so erhält man (§. 84.) die Projektionen der Geraden, welche durch den gegebenen Punkt auf die Ebene senkrecht gezogen werden kann. Sucht man nun nach §. 114. den Durchgangspunkt dieser Senkrechten und der Ebene, und bestimmt nach §. 87. die Entfernung des gegebenen und des Durchgangspunktes, so wird diese Entfernung auch der gesuchte Abstand sein. —

§. 117.

Beispiel. (Fig. 90.) Es sei EA'E die gegebene Ebene, A'A die Projektionen eines Punktes; zieht man von 'A auf 'E die Gerade 'AB′, und von A auf E die Gerade AB senkrecht, so wird jene die horizontale und diese die vertikale Projektion der Senkrechten sein, die man von A'A auf EA'E ziehen kann (§. 84.). Nimmt man nun AC als horizontale Spur einer Hülfsebene an, so wird, wenn diese die Gerade enthalten soll, ihre vertikale Spur die Senkrechte CC′ sein. Von Y auf X die Senkrechte YY′, sodann Y′C′ gezogen, so wird letztere (§. 110.) die vertikale Projektion der Communsektion von der gegebenen und der Hülfsebene sein. Der Durchschnittspunkt 'D ist die vertikale Projektion des Durchgangspunktes der Senkrechten mit der Ebene, dessen horizontale Projektion nach (§. 73.) erhalten, und D sein wird. Construirt man nun das Trapez ARNM, in welchem DN = aD′, AM = b'A ist, so wird nach §. 87. die Gerade MN der Abstand des gegebenen Punktes A'A von der Ebene sein. —

§. 118.

Aufgabe 15. Es ist eine Ebene und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben, man soll durch diesen Punkt eine Ebene parallel zur gegebenen ziehen.

Auflösung. Da die gesuchte Ebene parallel zur gegebenen sein muss, so wird auch (§. 85.) die horizontale Spur jener Ebene parallel zur horizontalen Spur der gegebenen, und die vertikale Spur der gesuchten parallel zur vertikalen Spur der gegebenen Ebene sein müssen. Geben wir daher von jeder Spur jener Ebene einen Punkt an, so wird dieselbe bestimmt werden können. Um von der vertikalen Spur einen Punkt zu erhalten, nehmen wir die horizontale Spur als Generatrix der Ebene an, und denken uns diejenige Lage von letzterer projicirt, die durch den gegebenen Punkt geht; so wird die horizontale Projek-

ion derselben (§. 72.) durch die horizontale Projektion des Punktes gehen, und (§. 113.) parallel zur horizontalen Spur der gegebenen Ebene ihre vertikale Projektion wird (§. 72.) durch die vertikale Projektion des Punktes gehen und (§. 74.) parallel mit X sein. Zieht man daher die Projektionen dieser Lage der Generatrix, und bestimmt ihre vertikale Spur, so wird dieser Punkt auf der Direktrix der Ebene, also auf ihrer vertikalen Spur enthalten sein. Legt man nun durch diesen Punkt eine Gerade parallel zur vertikalen Spur, und durch den Punkt, in welchem diese Gerade die Axe X trifft, eine Parallele zur horizontalen Spur der gegebenen Ebene, so werden diese erhaltenen Geraden (§. 86.) die Spuren der gesuchten Ebene sein. — Trifft die vertikale Spur der Ebene die Axe auf den Tafeln nicht, so nehme man diese vertikale Spur als Generatrix der Ebene an, und bestimme diejenige Lage dieser Generatrix, welche durch den gegebenen Punkt geht. Von dieser Lage der Generatrix die horizontale Spur bestimmt (§. 93.), und durch letztere eine Gerade parallel zur horizontalen Spur der gegebenen Ebene gezogen, gibt die horizontale Spur der Ebene. —

Anmerk. Liegt der gegebene Punkt in einer der Tafeln, so geht durch denselben schon die eine Spur der Ebene, und es kann dieselbe sodann leicht, so wie auch ihre vertikale Spur bestimmt werden. —

§. 119.

Beispiel. (Fig. 91.) Ist ES, 'E die gegebene Ebene, und es soll durch den Punkt, dessen horizontale Projektion A und dessen vertikale 'A ist, eine Ebene gelegt werden, die parallel zur gegebenen ist, so betrachte man die horizontalen Spuren dieser Ebenen als Erzeugungslinien derselben, ziehe Aa ⫫ E, ferner 'Aa' parallel X, so wird jene die horizontale und diese die vertikale Projektion derjenigen Lage der Erzeugenden der gesuchten Ebene sein, welche durch den gegebenen Punkt geht. Von a aus auf X die Senkrechte aa' gezogen gibt (§. 93.) in a' die vertikale Spur der Erzeugenden, und a' S_2 ⫫ 'E gezogen, gibt die vertikale Spur der gesuchten Ebene. Ihre horizontale Spur wird entweder erhalten, wenn man S_2b ⫫ E zieht, oder durch den Punkt eine Gerade zur vertikalen Spur 'E parallel legt, von dieser die horizontale Spur b sucht, und bS_2 ⫫ E zieht. —

§. 120.

Aufgabe 16. Es ist eine Gerade durch ihre Projektionen gegeben und ein Punkt; man soll durch letzteren eine Ebene legen, die senkrecht auf der Geraden steht.

Auflöung. Aus §. 84. ersieht man, dass die Spuren der zu suchenden Ebene senkrecht auf den entsprechenden Projektionen der Geraden sein müssen. Zieht man daher senkrecht auf die vertikale Projektion der Geraden eine Gerade, so wird mit dieser die vertikale Spur der Ebene parallel sein, und eine Senkrechte auf die horizontale Projektion der Geraden gezogen, so wird mit dieser die horizontale Spur der Ebene parallel sein müssen. Da nun der gegebene Punkt auf der gesuchten Ebene liegen soll, so wird auch die Erzeugende dieser Ebene einmal durch denselben gehen müssen. Man betrachte daher die vertikale Spur der Ebene als Generatrix derselben, ziehe durch die vertikale Projektion des Punktes eine Parallele zur Generatrix und durch seine horizontale Projektion eine Parallele mit X, so erhält man diejenige Lage der Generatrix, welche durch den gegebenen Punkt geht. Sucht man von derselben die horizontale Spur, zieht durch letztere eine Senkrechte auf die horizontale Projektion der Geraden, verlängert diese Senkrechte, bis die Axe X getroffen wird, und fällt von diesem Durchschnittspunkte auf die vertikale Projektion der Geraden eine Senkrechte, so erhält man die Spuren der gesuchten Ebene. Trifft die horizontale Spur der Ebene die Axe X nicht, so lege man durch den Punkt eine zweite Gerade, die parallel zu dieser horizontalen Spur ist, suche von dieser Geraden ihre vertikale Spur, und ziehe durch letztere eine Senkrechte auf die vertikale Projektion der Geraden, so erhält man die vertikale Spur der gesuchten Ebene.

Anmerk. 1. Man kann auch die zweit-vertikale Spur der zu suchenden Ebene zuerst bestimmen, und sodann von ihrem Durchschnittspunkte mit Z auf die vertikale Projektion der Geraden eine Senkrechte, und von ihrem Durchschnittspunkte mit Y auf die horizontale Projektion der Geraden eine Senkrechte ziehen, so werden diese beiden Senkrechten die Spuren der gesuchten Ebene sein. —

Anmerk. 2. Liegt ein Punkt in einer Ebene, und man zieht durch denselben eine Parallele zu einer Spur dieser Ebene, so wird diese Parallele immer als eine Lage der Erzeugungslinie der Ebene betrachtet werden können, und mithin ganz und gar in der Ebene liegen. Eine solche Parallele wird aber (§. 29.) auch parallel mit der Tafel sein, in welcher die Erzeugende der Ebene liegt, und mithin wird die eine Projektion der Parallelen parallel zur Erzeugenden, die andere mit X parallel sein (§. 76.) Wenn man also von der horizontalen Projektion eines in einer Ebene liegenden Punktes eine Parallele zur horizontalen Spur der Ebene, und durch seine vertikale Projektion eine Parallele zur Axe X zieht, so

erhält man immer die Projektionen einer Geraden; die sich in der Ebene befindet, und mithin wird die vertikale Spur dieser Geraden der vertikalen Spur der Ebene angehören. Dasselbe findet auch statt, wenn man die vertikale Spur der Ebene als Erzeugende derselben betrachtet. —

§. 121.

Beispiel. (Fig. 92.) L'L sei die gegebene Gerade und A'A ein Punkt, durch welchen eine Ebene senkrecht auf diese Gerade gezogen werden soll. Man ziehe Aa senkrecht auf L und 'A a' = X, bestimme (§. 93.) von dieser Geraden die vertikale Spur 'a, so muss 'a ein Punkt der vertikalen Spur der Ebene sein. Von 'a auf 'L die Gerade 'E senkrecht gezogen, diese bis X verlängert, und von ihrem Durchschnittspunkte S mit X auf L die Senkrechte E gezogen, so wird ES'E die gesuchte Ebene sein. Zieht man von 'A aus senkrecht auf 'L die Senkrechte 'A'b und durch A mit X die Gerade Ab parallel, bestimmt (§. 93.) die horizontale Spur b dieser Geraden, so erhält man einen zweiten Punkt von E, so dass letztere auch bestimmt werden könnte, wenn der Punkt S ausserhalb der Gränze unserer Zeichnungstafeln liegen würde. —

§. 122.

Aufgabe 17. Die Entfernung eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen.

Auflösung. Legt man nach §. 120. vom Punkte aus eine Ebene senkrecht auf die Gerade, sucht den Durchgangspunkt von letzterer mit der Ebene, und verbindet diesen Durchgangspunkt mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade, so wird letztere (§. 4.) ganz und gar in der Ebene liegen, und (§. 7.) senkrecht auf der gegebenen Geraden stehen; folglich ist die Gerade, die man vom Durchgangspunkte der gegebenen und der Ebene nach dem gegebenen Punkte zieht, die gesuchte Entfernung des Punktes von der gegebenen Geraden.

Beispiel. (Fig. 93.) Ist L die horizontale, 'L die vertikale Projektion einer Geraden, A die horizontale und 'A die vertikale Projektion eines Punktes, so ziehe man 'A s' senkrecht auf 'L und As senkrecht auf L, bestimme von (As, 'As') (§. 93.) die horizontale Spur s, ziehe sS senkrecht auf L und SV senkrecht auf 'L, so wird (§. 120.) Ebene HSV senkrecht auf L'L stehen und durch den gegebenen Punkt gehen. Bestimmt man nun (§. 114.) den Durchgangspunkt DD' von L'L und Ebene HSV, zieht 'D'A und DA, so erhält man die Projektionen des gesuchten Abstandes, dessen Länge BF nach §. 87. bestimmt werden kann.

§. 123.

Aufgabe 18. Die kürzeste Entfernung zweier Geraden zu finden, die im Raume unter sich parallel sind.

Auflösung. Man nehme eine Ebene an, die senkrecht auf beiden Geraden steht, kann also nach den Regeln des §. 73. auf einer der Geraden einen beliebigen Punkt annehmen, von diesem aus nach §. 120. auf die zweite Gerade eine Ebene senkrecht legen, so wird letztere (§. 27.) auch auf der ersten Geraden senkrecht stehen. Nun bestimme man (§. 114.) den Durchgangspunkt der zweiten Geraden mit der Hülfsebene, ziehe von diesem aus nach dem auf der ersten Geraden angenommenen Punkte eine Gerade, so wird letztere auf beiden gegebenen Geraden senkrecht stehen (§. 7.), und ist mithin der Abstand derselben. In Fig. 95. ist ein zu dieser Aufgabe gehöriges Beispiel ausgeführt. —

§. 124.

Aufgabe 19. Es sind zwei Gerade gegeben, die weder parallel sind, noch sich schneiden; man soll

1. ihre kürzeste Entfernung bestimmen,

2. den Ort angeben, in welchem diese Entfernung beide Gerade trifft. —

Auflösung. In §. 55. wurde bewiesen, dass man für diese zwei Gerade eine gerade Linie finden kann, die auf beiden zugleich senkrecht steht, und dort wurde auch der Weg gezeigt, welchen man einschlagen muss, um zur Bestimmung dieses Abstandes zu gelangen. Man hat nämlich auf folgende Weise zu verfahren:

1. Muss man durch die erste Gerade eine Ebene legen, die parallel zur zweiten Geraden ist. Diess wird nach §. 109. dadurch geschehen, indem man von einem beliebigen Punkte der ersten Geraden eine Parallele zur zweiten zieht, und (§. 101.) die Ebene bestimmt, welche diese Parallele und die erste Gerade enthält.
2. Hat man von einem beliebigen Punkte der zweiten Geraden auf die Hülfsebene eine Senkrechte zu ziehen, und den Durchgangspunkt derselben zu bestimmen, wobei also ganz nach §. 116. zu verfahren ist; so wird diese Senkrechte (§. 55.) schon gleich der kürzesten Entfernung beider Geraden sein. —
3. Um nun auch den Ort zu bestimmen, in welchem diese Entfernung auf beiden Geraden senkrecht steht, ziehe man (§. 76.) durch den Durch-

gangspunkt jener Senkrechten und der Ebene eine Parallele zur zweiten Geraden, so liegt diese Parallele ganz und gar in der Hülfsebene, und schneidet daher die erste Gerade.

4. Von diesem Durchschnittspunkte aus eine Parallele mit der ersten Senkrechten gezogen, so wird von dieser Parallelen die zweite Gerade (§. 53.) geschnitten, und der zwischen beiden Geraden enthaltene Theil dieser Parallelen wird auf beiden senkrecht stehen, und ihrer kürzesten Entfernung gleich sein. —

§. 125.

Beispiel. (Fig. 94.) Sind $L_1 'L_1$ die Projektionen der einen Geraden, $L_2 L'_2$ die Projektionen der zweiten Geraden, so nehme man auf der ersten Geraden einen Punkt a a′ an, dessen vertikale Projektion a′ in $'L$ und dessen horizontale Projektion a in L (§. 72.) liegen muss. Zieht man nun durch diesen Punkt mit der Geraden $L_2 'L_2$ eine Parallele, so wird a′ b $\neq$ $'L_2$ und a b $\neq$ L_2 (§. 76.) sein müssen. Nun lege man durch diese Parallele und $L_1 'L_1$ eine Ebene nach §. 101., und es sei E die horizontale und $'E$ die vertikale Spur dieser Ebene. Nimmt man nun (§. 73.) auf $L_2 'L_2$ einen Punkt durch seine Projektionen m m′ an, zieht m′ p′ senkrecht auf $'E$ und m p senkrecht auf E, sucht von dieser Geraden (§. 114.) den Durchgangspunkt mit der Ebene, dessen Projektionen D $'D$ sind, so erhält man die horizontale Projektion m D und die vertikale Projektion m′ D′ der kürzesten Entfernung beider Geraden. Zieht man D f $\neq$ L_2 und D′ f′ $\neq$ L'_2, von f′ die Gerade $'f'n$ parallel m′ D′ und von f aus die Gerade f n $\neq$ m D, so werden f n und f′ n′ gleich den Projektionen des kürzesten Abstandes sein, und mithin die Gerade, deren Projektionen f n und f′ n′ sind, die gesuchte sein, weil sie die kürzeste Entfernung beider Geraden ist, und auf denselben (§. 53.) senkrecht sein muss.

Anmerk. Liegen beide Geraden so, dass man durch die eine und einen Punkt der andern eine Ebene legen kann, welche senkrecht auf der letztern ist, so wird die Gerade, die man vom Fusse der letzteren auf die erste Gerade zieht, der kürzeste Abstand beider Geraden sein.

§. 126.

Aufgabe 20. Die Winkel zu bestimmen, welche eine Ebene mit den Projektionstafeln bildet.

Auflösung. Nach §. 43. wird der Winkel zweier Ebenen gefunden, wenn man in ihrer Communsektion einen Punkt annimmt, von diesem aus auf jene zwei Senkrechte zieht, von welchen die eine in der ersten, die andere in der zweiten Ebene liegt; und sodann den Winkel dieser beiden Geraden konstruirt, so wird derselbe der gesuchte sein. In §. 50. wurde aber gezeigt, dass dieser Neigungswinkel in einer Ebene enthalten ist, die man auf die Communsektion der beiden gegebenen Ebenen senkrecht zieht; daher wird der Winkel, welchen die Ebene mit der horizontalen Tafel bildet, auf folgende Weise bestimmt:

1. Man nehme in der horizontalen Spur der gegebenen Ebene einen Punkt an, und ziehe von diesem aus auf die horizontale Spur eine Ebene senkrecht. Da nun diese Hülfsebene senkrecht auf einer in der horizontalen Tafel liegenden Geraden ist, so wird dieselbe (§. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen, mithin (§. 83.) ihre vertikale Spur senkrecht auf X und (§. 84.) ihre horizontale Spur senkrecht auf der horizontalen Spur der gegebenen Ebene sein. Diese Hülfsebene kann also leicht gefunden werden.
2. Bestimme man (§. 110.) die Communsektion der gegebenen und der Hülfsebene, so wird der Winkel, den diese Communsektion mit der horizontalen Spur der Hülfsebene bildet, der gesuchte sein. Um nun diesen Winkel konstruiren zu können, konstruire man das rechtwinklige Dreieck, in welchem die Theile der Spuren der Hülfsebene, welche zwischen den Spuren der gegebenen Ebene und X liegen, Katheten sind, so wird die Hypothenuse dieses Dreieckes die Communsektion der Hülfsebene und der gegebenen sein, und mit der horizontalen Spur der Hülfsebene den Winkel bilden, welchen die Ebene mit der horizontalen Tafel macht. Durch ein ähnliches Verfahren kann man den Winkel erhalten, welchen die Ebene mit der vertikalen Tafel macht. — Im folgenden Paragraphe soll durch ein Beispiel die Construktion ausgeführt werden. —

§. 127.

Beispiel. (Fig. 95.) Ist $ES'E$ die Ebene, deren Neigungswinkel mit der horizontalen Tafel bestimmt werden soll, so nehme man in der horizontalen Spur E einen Punkt A an, lege durch diesen die Ebene A a a′ senkrecht auf E, so wird die horizontale Spur A a dieser Ebene senkrecht auf E, ihre vertikale Spur a a′ senkrecht auf X sein. Denkt man sich nun die Communsektion A a′ beider Ebenen, so wird diese mit A a einen Winkel bilden, welcher der gesuchte ist. Dieser Winkel ist aber in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Hathete A a und dessen andere a a′ ist; daher wird derselbe erhalten, wenn man Ebene A a a′ um A a dreht und in die horizontale Tafel niederlegt, so-

dann aC senkrecht auf Aa zieht und gleich aa′ macht, die Gerade AC zieht, so wird diese die Communsektion von Ebene Aaa′ und Ebene ES′E sein, und ∠ CAa der gesuchte. —

Soll der Winkel bestimmt werden, den die Ebene ES′E mit der vertikalen Tafel bildet, so ziehe man aB′ senkrecht auf Sa′ und ab senkrecht auf X in der horizontalen Tafel, wodurch Ebene B′ab erhalten wird, die senkrecht auf E steht und deren Communsektion mit der gegebenen Ebene gegen aB′ unter denselben Winkel geneigt ist, den Ebene ES′E mit der vertikalen Tafel bildet. Dreht man nun Ebene baB′ um bB′, und legt sie in die vertikale Tafel, so wird der Punkt b in der Geraden aD bleiben, die senkrecht auf aB ist, und macht man aD = ab, so erhält man den Ort des Punktes D. Nun ziehe man B′D, so wird diese die Communsektion der Ebene AaB′ und der Ebene ES′E sein, und folglich ∠ DB′a der gesuchte. —

Anmerk. 1. Dreht man Ebene Aaa′ um aa′ und legt dieselbe links von dieser Linie in die vertikale Tafel, so beschreibt A einen Kreisbogen vom Halbmesser aA, und kömmt nach der Drehung nach F, folglich ist Fa′ die Communsektion von Ebene Aaa′ und Ebene ES′E, und ∠ a′Fa = ∠ aAC = b dem Winkel, den Ebene ES′E mit der horizontalen Tafel bildet. —

Auf gleiche Weise kann man den Winkel, welchen Ebene ES′E mit der vertikalen Tafel bildet erhalten, wenn man Ebene B′ab um ab dreht, und links von ab in die horizontale Tafel legt. Dabei beschreibt B einen Kreisbogen vom Halbmesser aB′ und kömmt nach G zu liegen, wodurch also ∠ bGa = ∠ DB′a = v wird. —

Anmerk. 2. In den Fig. 96., 97. und 98. sind noch einige Beispiele über die Aufsuchung des Winkels einer Ebene und der Tafeln. —

§. 128.

Aufgabe 21. (Fig. 95.) Es ist die horizontale Spur einer Ebene gegeben und der Winkel, welchen die Ebene mit der vertikalen Tafel bildet; man soll die vertikale Spur der Ebene bestimmen.

Auflösung. Ist E die horizontale Spur der Ebene und v′ der Winkel, welchen dieselbe mit der vertikalen Tafel macht, so nehme man in der Axe einen beliebigen Punkt G an, und lege von diesem aus an die Axe den gegebenen Winkel, und konstruire nun das rechtwinklige Dreieck, welches die Communsektion der gegebenen und der Hülfsebene enthält. Zu diesem Ende verlängere man den zweiten Schenkel Gb des Winkels v, bis die horizontale Spur E der Ebene getroffen wird, so wird Gb die Communsektion der gegebenen und der Hülfsebene sein. Zieht man daher ba senkrecht auf X, so wird aG die vertikale Spur und ba die horizontale Spur der Hülfsebene sein, und diese beiden Spuren haben in der Axe den Punkt a gemeinschaftlich. Da nun die Hülfsebene, welche den Winkel der gegebenen Ebene und der vertikalen Tafel enthält, senkrecht auf der gesuchten vertikalen Spur stehen muss, so wird letztere erhalten, wenn man von a aus mit aG einen Kreisbogen beschreibt, und von S aus eine Tangente an diesen Bogen zieht. Da von S aus zwei Tangenten an diese Peripherie gezogen werden können, so wird es auch zwei Ebenen geben, die eine gemeinschaftliche horizontale Spur E haben, und unter den gegebenen Winkel gegen die vertikale Tafel geneigt sind —

§. 129.

Aufgabe 22. Es sind die Winkel gegeben, welche eine Ebene mit den beiden Tafeln macht, ferner die Projektionen eines auf der Ebene liegenden Punktes; man soll die Spuren der Ebene bestimmen. —

Auflösung. Die Auflösung dieser, so wie die der vorigen Aufgabe geht aus der Anmerkung des §. 127. hervor. Dort wurde erwähnt, das man das rechtwinklige Dreieck, das den Winkel der Ebene und der horizontalen Tafel enthält, auch in der vertikalen Tafel verzeichnen kann, wenn man die diesen Winkel enthaltende Hülfsebene um ihre vertikale Spur dreht, und in die vertikale Tafel legt. Nun ist die eine Kathete dieses Dreieckes der Theil der vertikalen Spur der Hülfsebene, welcher zwischen der Axe und der vertikalen Spur der gesuchten Ebene liegt; die andere Kathete ist die vom Durchschnittspunkte der einen Kathete mit X auf die horizontale Spur der Ebene gefällte Senkrechte, mit welcher die Hypothenuse den Winkel bildet, den die Ebene mit der horizontalen Tafel macht. (Fig. 96.) Nehmen wir daher in der Axe den beliebigen Punkt F an, machen Fa beliebig lang, legen in F an X in der vertikalen Tafel den Winkel an, welchen die Ebene mit der horizontalen Tafel bildet, ziehen aa′ senkrecht auf X, so wird diese Linie von Fa′ in a′ getroffen, und es ist mithin Faa′ das erwähnte rechtwinklige Dreieck, folglich aa′ die vertikale, aF die horizontale Spur der Hülfsebene. Da nun a′F die Communsektion der gesuchten und der Hülfsebene ist, so wird a′ ein Punkt der vertikalen Spur der gesuchten Ebene sein, ihre horizontale Spur muss Tangente des Kreises sein, den man aus a mit aF beschreibt. Es wurde ferner in der Anmerkung des §. 127. erwähnt, dass man den Winkel, wel-

chen die Ebene mit der vertikalen Tafel macht, in der horizontalen Tafel konstruiren kann; wenn man die vertikale Spur der von a aus auf die vertikale Spur der gesuchten Ebene senkrecht gelegten Hülfsebene auf X trägt, und a G gleich dieser vertikalen Spur macht, sodann den Endpunkt b ihrer horizontalen Spur mit G durch eine Gerade verbindet, so wird $\leq$ b G a der Neigungswinkel der Ebene und der vertikalen Tafel sein. Wenn man daher von a aus eine beliebige Gerade a G auf X annimmt, von G aus in der horizontalen Tafel an X den Winkel anlegt, welchen die Ebene mit der vertikalen Tafel bildet, von a aus auf X die Gerade a b senkrecht zieht, so wird diese von G b in b getroffen, und es ist mithin b ein Punkt der horizontalen Spur der gesuchten Ebene. Von b aus eine Tangente b A an den von a aus mit a F konstruirten Kreisbogen gezogen gibt die horizontale Spur der gesuchten Ebene, deren vertikale Spur a S nun leicht erhalten werden kann. Da von b aus zwei Tangenten an die Peripherie des von a aus mit a F gezogenen Kreises möglich sind, so werden auch zwei Ebenen erhalten, welche die Bedingung erfüllen. Zieht man nun von dem gegebenen Punkte m m′ aus (nach §. 118.) eine Ebene T V′T parallel zu einer dieser beiden gefundenen, so erhält man die gesuchte Ebene. —

§. 130.

Aufgabe 23. Es ist eine Ebene gegeben und ein Punkt derselben durch seine Projektionen; man soll die Ebene um eine ihrer Spuren drehen, und in die mit dieser Spur gleichnamige Tafel legen, sodann den Ort des Punktes bestimmen. —

Auflösung. Soll die durch ihre Spuren angegebene Ebene um ihre horizontale Spur gedreht, und in die horizontale Tafel gelegt werden, so wird jeder auf derselben liegende Punkt einen Kreisbogen beschreiben, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe ist (§. 23.). Betrachtet man daher irgend einen auf der Ebene liegenden Punkt, dessen Projektionen gegeben sind, so wird man dessen Lage, nachdem die Ebene in die horizontale Tafel gelegt ist, leicht bestimmen können. Da nämlich dieser Punkt einen Kreisbogen beschreibt, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe ist, so bleibt er während und nach der Drehung in der Ebene dieses Kreisbogens, und kömmt mithin nach der Drehung in die horizontale Spur dieser Ebene zu liegen. Diese Ebene steht nun senkrecht auf der horizontalen Spur der gegebenen Ebene, und muss daher (§. 45.) auch senkrecht auf der horizontalen Tafel sein, weshalb also ihre horizontale Spur durch die horizontale Projektion des betrachteten Punktes gehen muss (§. 83., Anmerk.). Nun muss aber die horizontale Spur der Ebene des Kreisbogens, welchen der genannte Punkt beschreibt, nach §. 24. auf der horizontalen Spur gegebenen Ebene senkrecht stehen; zieht man daher von der horizontalen Projektion des Punktes aus auf die Drehungsaxe eine Senkrechte, so erhält man die horizontale Spur der Ebene des Kreisbogens, welchen der angenommene Punkt beschreibt, und der Mittelpunkt dieses Kreises liegt im Durchschnitte der horizontalen Spur seiner Ebene mit der Drehungsaxe. Um nun den Ort dieser horizontalen Spur der Ebene des Kreisbogens zu bestimmen, nach welchem der Punkt nach der Drehung zu liegen kömmt, darf man nur die Entfernung dieses Punktes von der Drehungsaxe angeben. Diese Entfernung ist aber die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete die horizontal-projicirende Linie also gleich der vertikalen Ordinate, und dessen andere Kathete der Entfernung der horizontalen Projektion des Punktes von der Drehungsaxe ist. Construirt man daher dieses Dreieck, und trägt seine Hypothenuse auf die von der horizontalen Projektion des Punktes auf die Drehungsaxe gezogene Senkrechte von ihrem Durchschnittspunkte mit der Drehungsaxe aus, so erhält man die Lage des Punktes, nachdem die Ebene, auf welcher er sich befindet, in die horizontale Tafel gelegt wurde. Um also die Construktion für die Lage eines Punktes, der sich auf einer Ebene befindet, welche um ihre horizontale Spur gedreht, und in die horizontale Tafel gelegt wird, auszuführen, verfahre man auf folgende Weise:

1. Ziehe man von der horizontalen Projektion des Punktes aus auf die Drehungsaxe eine Senkrechte, und verlängere diese nach derjenigen Seite hinaus, auf welche man die Ebene legen will.
2. Construire man über die Entfernung der horizontalen Projektion des Punktes von der Drehungsaxe als eine Kathete ein rechtwinkliges Dreieck, dessen andere Kathete gleich der vertikalen Ordinate des Punktes ist.
3. Vom Durchschnittspunkte der Senkrechten mit der Drehungsaxe, welche von der horizontalen Projektion des Punktes auf die Drehungsaxe gezogen wurde, trage man nun auf jene Senkrechte die Hypothenuse des Dreieckes auf, so wird der bezeichnete Endpunkt die Lage desjenigen sein, dessen Projektionen angegeben sind. — Auf gleiche Weise wird man verfahren, wenn eine durch ihre Projektionen angegebene Figur, die in einer Ebene liegt, bestimmt werden soll. —

§. 131.

Beispiel. (Fig. 99.) Ist E die horizontale, E die vertikale Spur einer Ebene, ferner abcde die horizontale Projektion eines auf dieser Ebene liegenden Fünfeckes, so bestimmie man zuerst nach §. 107. seine vertikale Projektion a′b′c′d′e′, ziehe von der horizontalen Projektion a aus auf E die Gerade aC_1 senkrecht, errichte von a aus auf aC_1 die Gerade a′A senkrecht, mache a′A = m a, und ziehe C_1′A. Trägt man nun C_1′A von C_1 aus auf die Verlängerung von aC_1, so erhält man den Punkt A, dessen Projektionen a und a′ sind. Auf gleiche Weise kann man die Lage der Punkte B, C, D, E finden, die durch ihre Projektionen bb′, cc′, dd′, ee′ angegeben sind. Soll man einen Punkt der vertikalen Spur, z. B′F angeben, so bestimme man (§. 79.) seine horizontale Projektion F, ziehe FG senkrecht auf E, fälle von F aus auf FG die Gerade FF_1 senkrecht, ziehe GF_1, und trage GF_1 auf GF_2, indem man zugleich GF_2 = GF_1 macht, so erhält man die Lage des Punktes F′ nach der Drehung und die Gerade SF_2 wird sodann die Lage der vertikalen Spur dieser Ebene sein, wenn dieselbe um E gedreht, und in die horizontale Tafel gelegt wird. —

§. 132.

Aufgabe 24. Eine Ebene, deren Spuren angegeben sind, ist um ihre horizontale Spur gedreht, und die horizontale Tafel niedergelegt worden; ferner ist auf derselben ein Punkt angegeben; man soll die Projektionen des Punktes bestimmen, nachdem die Ebene wieder in ihre erste Lage gebracht worden ist.

Auflösung. Zur Lösung dieser Aufgabe benützen wir die in §. 130. erhaltenen Resultate. Dort wurde nämlich erwähnt, dass die Entfernung des Punktes im Raume von der Drehungsaxe gleich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen eine Kathete die Entfernung der horizontalen Projektion des Punktes von der Drehungsaxe, und dessen andere Kathete gleich der vertikalen Ordinate des Punktes ist. Da aber dieses rechtwinklige Dreieck in einer auf der horizontalen Spur senkrechten Ebene liegt, so ist derjenige Winkel desselben, den seine Hypothenuse mit der horizontalen Spur seiner Ebene — also mit der Entfernung der horizontalen Projektion des Punktes von der Drehungsaxe — bildet, das Maass des Winkels der gegebenen Ebene und der horizontalen Tafel nach §. 126. Nun ist aber die Hypothenuse des genannten Dreieckes, nämlich die Entfernung des Punktes von der Drehungsaxe bekannt, und der Winkel, welchen die Ebene mit der horizontalen Tafel macht, kann nach §. 126. konstruirt werden, folglich kann die Construktion dieses Dreieckes ausgeführt werden. Zieht man also von dem gegebenen Punkte aus auf die Drehungsaxe eine Senkrechte, und verlängert dieselbe gegen X, legt sodann den Neigungswinkel der Ebene und der horizontalen Tafel vom Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit der Drehungsaxe aus, an die Verlängerung dieser Senkrechten, trägt auf den zweiten Schenkel dieses Winkels die Entfernung des Punktes von der Drehungsaxe, und fällt von dem hierdurch erhaltenen Endpunkte aus auf den ersten Schenkel eine Senkrechte, so wird letztere gleich der vertikalen Ordinate des Punktes, ihr Endpunkt aber die horizontale Projektion des Punktes sein, dessen vertikale Projektion nun leicht bestimmt werden kann.

§. 133.

Beispiel. (Fig. 100) Es sei E die horizontale, E die vertikale Spur einer Ebene, welche um E gedreht, und in die horizontale Tafel niedergelegt wurde, ferner A ein auf dieser umgelegten Ebene enthaltener Punkt, man soll die Ebene wieder in diejenige Lage bringen, welche durch ihre Spuren angegeben wird, und die Projektionen von A bestimmen. Zu diesem Zwecke ziehe man von A aus auf E die Senkrechte Am, so ist diese die horizontale Spur der Ebene des Kreises welchen der Punkt beim Zurückbringen in seine erste Lage beschreibt. Diese Ebene wollen wir sogleich benützen, um den Winkel der Ebene und der horizontalen Tafel sogleich bestimmen zu können, welches nach §. 126. geschehen kann, und der durch den Winkel xm′A = h gemessen wird. Legt man nun in m an mx diesen Winkel an, macht ferner m′A = mA, und zieht ′A a senkrecht auf mx, so wird a die horizontale Projektion des Punktes A sein, dessen vertikale Projektion nach §. 65. erhalten wird, und a sein muss.

Ist nun ABCD ein in der umgelegten Ebene angegebenes Quadrat, so kann man jeden einzelnen Scheitel desselben durch Wiederholung des vorigen Verfahrens projiciren. Man kann zur Abkürzung der Construktion den Winkel h in C an X legen, sodann C′A = CA machen, ′A m′ senkrecht auf X und ′A a′ parallel mit X ziehen, sodann ma = Cm′ machen, aa′ senkrecht auf X fällen, so erhält man im Durchschnitt a′ von aa′ mit ′A a′ die vertikale und in a die horizontale Projektion des Punktes A. Auf gleiche Weise werden die Projektionen abcd, a′b′c′d′ des Quadrates ABCD bestimmt. —

§. 134.

Aufgabe 25. Den Winkel zu bestimmen, welchen zwei Gerade einschliessen.

Auflösung. Legt man durch beide Gerade eine Ebene, und dreht diese letztere um eine ihrer Spuren, bis sie in eine der Tafeln zu liegen kömmt, so wird der Winkel beider Geraden sichtbar. Man wird also nach §. 101. die Spuren der Ebene beider Geraden bestimmen, von welchen bloss eine nothwendig ist, z. B. die horizontale Spur, sodann die Ebene um diese Spur drehen, und in die horizontale Tafel legen. Bei dieser Umlegung bleiben die horizontalen Spuren beider Geraden liegen, weshalb man also bloss noch die Lage ihres Durchschnittspunktes in der umgelegten Ebene anzugeben hat, was nach §. 130. geschieht. Zieht man nun von diesem Durchschnittspunkte nach den Spuren beider Geraden gerade Linien, so erhält man die gegebenen Geraden in der umgelegten Ebene, die also den verlangten Winkel mit einander bilden. —

§. 135.

Beispiel. (Fig. 101.) Es seien $L_1 'L_1$ die Projektionen der ersten, $L_2 'L_2$ die Projektionen der zweiten Geraden, a, a′ seien die Projektionen ihres Durchschnittspunktes, so suche man (§. 93.) die horizontale Spuren s_1, s_2 beider Geraden, ziehe $s_1 s_2$, wodurch man die horizontale Spur ihrer Ebene erhält. Dreht man nun diese Ebene um $s_1 s_2$, bis sie in der horizontalen Tafel liegt, so bleiben s_1 und s_2, als Punkte der Drehungsaxe liegen, der Punkt aber, dessen Projektionen a, a′ sind, kömmt nach A zu liegen, und es wird A nach §. 130. bestimmt, indem man über ac die Gerade ap senkrecht errichtet, ferner $ap = ma'$ macht, cp zieht, und sodann $cA = cp$ macht. —

§. 136.

Aufgabe 26. Den Winkel, welchen eine Gerade mit einer Ebene macht, zu bestimmen.

Auflösung. Um den Winkel anzugeben, welchen eine Gerade mit einer Ebene macht, erinnern wir uns vor Allem an die Regel (§. 21.), welche uns die Aufsuchung dieses Winkels zeigt. Dort heisst es:

1. Man verlängere zuerst die Gerade, bis sie die Ebene trifft, suche also ihren Durchgangspunkt.
2. Ziehe man von einem beliebig auf der Geraden angenommenem Punkte eine Senkrechte auf die Ebene, und suche auch den Durchgangspunkt der letzteren.
3. Verbinde man diese beiden Durchgangspunkte durch eine Gerade, so wird diese mit der gegebenen Geraden den verlangten Winkel bilden.

Nun ist aber dieser Winkel in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten; in welchem die auf die Ebene gezogene Senkrechte und die gegebene Gerade den Complementswinkel zum verlangten bilden. Man wird daher bei der Aufsuchung des Winkels beider Geraden auf folgende Weise verfahren:

1. Nehme man auf der Geraden einen Punkt an, was dadurch geschieht, dass man seine horizontale Projektion beliebig in der horizontalen Projektion der Geraden bezeichnet, und nach §. 73. seine vertikale Projektion bestimmt.
2. Ziehe man von diesem Punkte aus auf die gegebene Ebene eine Senkrechte, indem man (§. 72.) durch die Projektionen des Punktes Senkrechte auf die Spuren der Ebene zieht (§. 84.).
3. Bestimme man den Winkel, den diese Senkrechte mit der gegebenen Geraden macht (§. 134.); und ergänze diesen zu 90°, so ist der hierdurch erhaltene Ergänzungswinkel der gesuchte.

§. 137.

Beispiel. (Fig. 102.) Es sei EA'E die durch ihre Spuren E und 'E gegebene Ebene, L, 'L seien die Projektionen der gegebenen Geraden, so nehme man den Punkt p auf L an, und es wird (§. 73.) seine vertikale Projektion in L′ und in der von p auf X gezogenen Senkrechten, also in p′ liegen müssen. Zieht man nun pa_1 senkrecht auf E und pa'_1 senkrecht auf $'E_1$ so erhält man (§. 84.) die Projektionen der durch den Punkt pp′ gehenden und auf der Ebene senkrecht stehenden Geraden. Nun verlängere man $p'a'_1$ bis X, ziehe von a'_1 auf X in der horizontalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung eine Senkrechte, von welcher pa_1 in a_1 getroffen wird, so ist dieser Punkt also (§. 93.) die horizontale Spur der genannten Senkrechten. Verlängert man auch ebenso L′ bis X, zieht von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte a'_2 mit X auf diese letztere eine Senkrechte, die in der horizontalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung liegt, so erhält man im Durchschnittspunkte a_2 dieser Senkrechten mit L die horizontale Spur der gegebenen Geraden (§. 93.) Zieht man nun $a_2 a_1$, so erhält man die horizontale Spur derjenigen Ebene, welche durch L'L und die auf EA'E gezogene Senkrechte gelegt werden kann. Diese Ebene drehe man um $a_2 a_1$, und lege sie in die horizontale Tafel, ziehe pm senkrecht auf $a_2 a_1$ und mache $m'P = np'$. Zieht man nun p'P, und macht

$mP \equiv p'P$, so ist P der in der niedergelegten Ebene enthaltene Punkt, dessen Projektionen p, p' sind (§. 130.). Zieht man nun Pa_2, so wird diese die Lage von L, 'L und Pa_2 gezogen wird (§. 130.) die Lage der Senkrechten pa_1, $p'a'_1$ angeben, und es ist also (§. 134.) $< a_1Pa_1$ der von der Senkrechten und der gegebenen Geraden gemachte Winkel. Zieht man nun PA senkrecht auf Pa_2, so erhält man $< a_1PA$, welcher der verlangte ist. —

§. 138.

Aufgabe 27. Den Winkel zweier Ebenen, welche durch ihre Spuren angegeben sind, zu bestimmen.

Auflösung 1. Nimmt man zwischen beiden Ebenen einen Punkt an durch seine Projektionen (§. 65.), zieht von demselben aus auf jede der gegebenen Ebenen eine Senkrechte, deren Projektionen nach §. 84. erhalten werden können, und (§. 72.) durch die Projektionen des Punktes gehen müssen; so bilden diese beiden Senkrechten unter sich einen Winkel, welcher (§. 50.) gleich dem Nebenwinkel desjenigen ist, der den Winkel beider Ebenen misst. Man lege daher durch diese beiden Senkrechten eine Ebene, und bestimme von letzterer bloss eine, z. B. die horizontale Spur (§. 101.), drehe diese Ebene um ihre horizontale Spur, und lege sie in die horizontale Tafel nieder. Nun ziehe man von der horizontalen Projektion des angenommenen Punktes auf die Drehungsaxe eine Senkrechte, und suche die Hypothenuse desjenigen Dreieckes, von welchem jene Senkrechte und die vertikale Ordinate des Punktes die Katheten sind. Diese Hypothenuse trage man vom Durchschnittspunkte der auf die Drehungsaxe gezogenen Senkrechten auf diese selbst, so erhält man die Lage des angenommenen Punktes in der niedergelegten Ebene (§. 130.). Von diesem Punkte aus nach den Spuren beider Senkrechten Gerade gezogen, so werden letztere die Lage der auf die Ebenen gezogenen Senkrechten in der umgelegten Ebene angeben. Verlängert man die erste dieser beiden umgelegten Senkrechten, so bildet diese Verlängerung mit der zweiten Senkrechten den verlangten Winkel, welcher dem Maasse des Winkels beider Ebenen gleich ist. —

§. 139.

Auflösung 2. Man kann auch ganz nach dem in §. 43. angegebenem Verfahren den Winkel der beiden gegebenen Ebenen bestimmen, wornach man Folgendes zu thun hat:

1. Nehme man auf der Communsektion beider Ebenen einen Punkt beliebig an.
2. Ziehe man von diesem Punkte aus auf die Communsektion beider Ebenen zwei Senkrechte, von welchen die eine in der ersten, die andere in der zweiten Ebene liegt.
3. Bestimme man den Winkel dieser beiden Senkrechten, so wird derselbe der verlangte sein.

Um nun dieses vorgeschriebene Verfahren genau anzuwenden, legen wir jede der beiden Ebenen um eine ihrer Spuren in die entsprechende Tafel nieder, und zwar legen wir die erste sowohl, als auch die zweite Ebene um ihre horizontale Spur in die horizontale Tafel, so wird die Communsektion beider Ebenen in jeder derselben erscheinen. Diese Lage der Communsektion in der einen umgelegten Ebene sowohl als auch in der andern bestimmen wir nun (§. 130.), nehmen sodann in der ersten umgelegten Ebene auf der Communsektion einen Punkt an, ziehen von diesem aus auf die Communsektion eine Gerade senkrecht, und verlängern diese Senkrechte bis zu ihrem Durchschnitte mit der horizontalen Spur der entsprechenden Ebene. Auf der Communsektion in der zweiten umgelegten nehmen wir nun einen Pnnkt an, der vom Durchschnitte der horizontalen Spuren beider Ebenen ebenso weit entfernt ist, als der auf der Communsektion in der ersten umgelegten Ebene angenommene, so werden diese beiden Punkte, nachdem die Ebenen in ihre erste Lage zurückgebracht wurden, wieder in einen einzigen Punkt der Communsektion beider Ebenen zusammenfallen. Nun ziehe man von dem in der Communsektion in der zweiten umgelegten Ebene angenommenen Punkte aus auf diese Communsektion eine Senkrechte, und verlängere auch diese bis zu ihrem Durchschnitte mit der horizontalen Spur der zweiten Ebene. Ferner ziehe man von dem Durchschnittspunkte der ersten auf die Communsektion gezogenen Senkrechten mit der horizontalen Spur der ersten Ebene nach dem Durchschnittspunkte der zweiten Senkrechten mit der horizontalen Spur der zweiten Ebene eine Gerade, so bildet diese Gerade, wenn jede der beiden Ebenen in ihre erste Lage zurückgebracht worden ist, mit jenen beiden Senkrechten ein Dreieck, in welchem die beiden Senkrechten einen Winkel bilden, der das Maass des Winkels beider Ebenen ist. Ueber jene Gerade als Grundlinie konstruire man daher ein Dreieck, dessen beide andere Seiten die Senkrechten sind, welche auf die Communsektion errichtet wurden; so wird der Winkel dieser beiden Senkrechten sichtbar und dieser ist der verlangte. —

§. 140.

Auflösung 3. In §. 50. wurde gezeigt, dass wenn man in der Communsektion zweier Ebenen einen Punkt annimmt, von diesem aus auf die Communsektion eine Ebene senkrecht legt, die beiden gegebenen Ebenen nach Geraden geschnitten werden, welche in dem angenommenen Punkte der Communsektion den verlangten Winkel bilden. Es wird daher diese Aufgabe auch dadurch gelösst werden können, dass man eine Hülfsebene senkrecht auf die Communsektion beider Ebenen zieht, sodann dasjenige Dreieck konstruirt, von welchem der Theil der horizontalen Spur dieser Hülfsebene, welcher zwischen den horizontalen Spuren der gegebenen Ebenen liegt als Grundlinie angenommen werden kann, und die Communsektionen der Hülfsebene mit beiden gegebenen Ebenen die zwei andern Seiten sind. Um aber dieses Dreieck leicht durch Construktion erhalten zu können, bestimmen wir seine Höhe und denjenigen Punkt der Grundlinie, in welchem letztere von der Höhe getroffen wird. Ziehen wir nämlich von dem Punkte der Communsektion, in welchem sie von der Hülfsebene getroffen wird, auf die horizontale Spur der letzteren eine Senkrechte, so wird diese die gesuchte Höhe des Dreieckes sein. Da aber die Hülfsebene senkrecht auf der Communsektion ist, so wird letztere (§. 7.) auch senkrecht auf der Höhe des Dreieckes sein, das den gesuchten Winkel enthält. Wenn wir daher auf die Communsektion beider Ebenen in einer ihrer projicirenden Ebenen, z. B. in ihrer horizontal-projicirenden Ebene, eine Senkrechte von einem beliebigen Punkte derselben ziehen, so wird diese Senkrechte die horizontale Projektion der Communsektion treffen müssen, weil sie (§. 47.) mit dieser in der horizontalprojicirende Ebene liegt. Zieht man nun von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte aus eine Senkrechte auf die horizontale Projektion der Communsektion, so kann man diese als horizontale Spur der Hülfsebene annehmen, die den gesuchten Winkel enthält, und errichtet man daher über diese horizontale Spur der Hülfsebene im Dreieck, dessen Höhe die Senkrechte ist, welche vorhin auf die Communsektion gezogen wird, so wird am Scheitel dieses Dreieckes der Neigungswinkel beider Ebenen enthalten sein. Aus diesem Ganzen können wir also folgendes Verfahren ableiten:

1. Bestimme man (§. 110.) die Communsektion beider Ebenen durch ihre Projektionen.
2. Lege man die horizontal-projicirende Ebene der Communsektion um ihre horizontale Projektion in die horizontale Tafel, und bestimme die wahre Länge eines Theiles der Communsektion.
3. Ziehe man von einem in der Communsektion beliebig angenommenen Punkte aus auf letztere eine Senkrechte, so wird diese die horizontale Projektion der Communsektion in einem Punkte, der durch p bezeichnet sein soll, treffen.
4. Von diesem Punkte p aus ziehe man auf die horizontale Projektion der Communsektion eine Senkrechte, so wird diese (§. 84.) die horizontale Spur der Hülfsebene sein, welche senkrecht auf der Communsektion steht.
5. Ueber den Theil der horizontalen Spur dieser Hülfsebene, welcher zwischen den horizontalen Spuren beider gegebenen Ebenen liegt, konsruire man ein Dreieck, dessen Höhe die Senkrechte ist, welche man auf die Communsektion bis zu ihrer horizontalen Projektion gezogen hat; so wird dieses Dreieck an seinem Scheitel den gesuchten Winkel enthalten.

Anmerk. Durch jede dieser drei Lösungen wird man auf gleiches Resultat gelangen, und die eine oder andere derselben anwenden, wenn sie die Construktion für ein gegebenes Beispiel vereinfacht. — Es ist ferner auch gleichgültig, in welcher Tafel man die Construktion vornimmt, und es wird derjenige, welcher das Vorhergehende wohl verstanden hat, die Construktionen, welche vorher bloss in der horizontalen Tafel ausgeführt wurden, auch in der vertikalen Tafel ausführen können. —

§. 141.

Ueber jede der im Obigen angegebenen Lösungen zur Bestimmung des Winkels zweier Ebenen, sollen nun Beispiele gezeigt werden.

Beispiel 1. (Fig. 150.) Es sei $E_1 S_1 E_1$ die eine, $E_2 S_2 E_2$ die andere Ebene, deren Spuren sich noch in den Tafeln schneiden. Da hier die Communsektion leicht zu bestimmen ist, so nehmen wir die dritte Lösung, und bestimmen zu diesem Zwecke zuerst die Communsektion beider Ebenen, indem wir den Durchschnittspunkt s_1 der horizontalen Spuren in s'_1 vertikal und den Durchschnittspunkt s'_2 der vertikalen Spuren in s_2 horizontalprojiciren. Ziehen wir $s_1 s_2$ und $s'_1 s'_2$, so erhalten wir (§. 110.) die Projektionen der Communsektion beider Ebenen. Nun legen wir das horizontal-projicirende Dreieck dieser Communsektion um $s_1 s_2$ in die horizontale Tafel, ziehen $s_2 C$ senkrecht auf $s_1 s_2$ und gleich $s_2 s'_2$, verbinden C mit s_1 durch die Gerade $s_1 C$, so erhalten wir die Communsektion. Nun nehmen wir in $s_1 C$ den Punkt M an, ziehen Mp senkrecht auf $s_1 C$, legen durch p die Gerade pB senkrecht auf $s_1 s_2$, und verlängern Bp bis zum Durchschnitte A mit E_1, so ist AB die Grundlinie und pM die Höhe des Dreieckes, an

dessen Spitze der gesuchte Winkel ist. Nehmen wir daher $p'M = pM$, und ziehen $A'M$ und $B'M$, so sind letztere die Geraden, nach welchen die durch M gehende und auf der Communsektion senkrecht stehende Hülfsebene die Ebene $E_1 S_1 'E_1$ und $E_2 S_2 'E_2$ schneidet, weil A in der ersten, B in der zweiten Ebene, $'M$ aber in beiden Ebenen liegt, und folglich ist (§. 50.) $\sphericalangle A'MB$ der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen.

Anmerk. Projicirt man M, so wird im Durchschnitte der von M auf $s_1 s_2$ gezogenen Senkrechten Mm mit $s_1 s_2$, nämlich in m, die horizontale Projektion von M sein, dessen vertikale Projektion in m' ist, und nach §. 73. erhalten wird. Da nun A und B in der horizontalen Tafel liegen, so wird $\sphericalangle A m B$ die horizontale Projektion des Neigungswinkels beider Ebenen sein. Nach §. 70. ist die vertikale Projektion von A sowohl, als auch die von B in X, und mithin nach §. 63. durch $A'A$ in $'A$ die vertikale Projektion von A und durch BB' in $'B$ die vertikale Projektion von B bestimmt. Zieht man nun $'A m'$ und $B'm'$, so ist $\sphericalangle 'A m' B'$ die vertikale Projektion des Neigungswinkels beider Ebenen.

Beispiel 2. (Fig. 104.) $E_1 A_1 'E_1$ sei die eine und $E_2 A_2 'E_2$ die andere Ebene, ferner $'f$ der Durchschnittspunkt der vertikalen Spuren und e der Durchschnittspunkt der horizontalen Spuren, wobei e auf der rückwärtigen Verlängerung der horizontalen Tafel liegt. Zieht man nun fd senkrecht auf E_1, zieht fF'_1 senkrecht auf fd und macht $fF_1 = f'f$, verbindet d mit F'_1 durch die Gerade dF'_1, und trägt letztere von d aus auf die Verlängerung von fd, indem man $dF_1 = dF'_1$ macht, so erhält man (§. 130.) in F_1 den in der umgelegten Ebene $E_1 A_1 'E_1$ enthaltenen Durchschnittspunkt der beiden vertikalen Spuren. Legt man auch $E_2 A_2 'E_2$ in die horizontale Tafel, indem man dieselbe um E_2 dreht, und bestimmt sodann die Lage des Punktes $'f$ in dieser umgelegten Ebene, zieht zu diesem Zwecke fe senkrecht auf E_2 und macht eF_2 gleich der Hypothenuse desjenigen rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten $f'f$ und fe sind, so erhält man in F_2 den in der zweiten umgelegten Ebene enthaltenen Durchschnittspunkt der beiden vertikalen Spuren. Zieht man nun $F_1 C$, so ist diese Gerade die Communsektion beider Ebenen, welche nach §. 130. mit $E_1 A_1 'E_1$ in der horizontalen Tafel umgelegt wurde, und zieht man cF_2, so erhält man (§. 130.) die mit der zweiten Ebene in die horizontale Tafel gelegte Communsektion beider Ebenen. Nimmt man nun m_1 auf cF_1 und m_2 auf cF_2 so an, dass $cm_1 = cm_2$ wird, so werden die Punkte m_1 und m_2 in einen Punkt der Communsektion zusammenfallen, sobald die Ebenen wieder in ihre erste Lage zurückgebracht werden. Wenn man also m_1 senkrecht auf cF_1 errichtet und $m_2 b$ senkrecht auf cF_2 zieht, so wird die erstere dieser Linien, wenn die Ebenen wieder in ihre erste Lage gebracht werden, auf der Communsektion senkrecht sein und in $E_1 A 'E_1$ liegen, die zweite wird mit der ersten einen Punkt der Communsektion gemeinschaftlich haben, auf letzterer senkrecht sein und in Ebene $E_2 A_2 'E_2$ liegen, so dass also diese beiden Geraden (§. 139.) den Winkel beider Ebenen bilden. Zieht man also ab, und konstruirt mit den Seiten am_1, am_2 und ab ein Dreieck abM, so ist $\sphericalangle aMb$ der Neigungswinkel beider Ebenen (§. 139.).

Beispiel 3. (Fig. 105.) Es sei $E_1 A 'E_1$ die eine, $E_2 A 'E_2$ die andere Ebene, so suche man den Winkel dieser beiden Ebenen nach §. 138. Zu diesem Zwecke nehme man einen beliebigen Punkt (§. 63.) durch seine Projektionen $a'a$ an, ziehe $'aC'$ senkrecht auf $'E_1$ und ac senkrecht auf E_1, so erhält man (nach §. 72. und §. 84.) die Projektionen der durch den angenommenen Punkt gehenden und auf $E_1 A 'E_1$ senkrecht stehenden Geraden. Nun ziehe man ab senkrecht auf E_2 und $a'b'$ senkrecht auf $'E_2$, so erhält man (§. 72.) die Projektionen der durch den angenommenen Punkt gehenden und (§. 84.) auf $E_1 A 'E_2$ senkrecht stehenden Geraden. Verlängert man nun $a'c'$ bis X, so erhält man in s'_1 die vertikale Projektion der horizontalen Spur und im Durchschnitte der auf X senkrechten Geraden $s'_1 s_1$ mit ab die horizontale Spur der ersten Senkrechten (§. 93.). Ebenso bestimme man (§. 93.) die horizontale Spur s_2 der zweiten Senkrechten, ziehe $s_1 s_2$, so ist diese Gerade (§. 101.) die horizontale Spur der durch die beiden Senkrechten gelegten Ebene. Zieht man nun ad senkrecht auf $s_1 s_2$, macht dA gleich der Hypothenuse desjenigen rechtwinkligen Dreieckes, von welchem da die eine und $a'a$ die andere Kathete ist, so erhält man den Punkt A (§. 130.), welcher die Lage des Punktes aa' angibt, der mit der Hülfsebene in die horizontale Tafel gelegt wurde. Zieht man nun As_1 und As_2, so werden diese Geraden die Lage der auf die Ebenen gefälten Senkrechten, welche mit ihrer Ebene in die horizontale Tafel gelegt wurden, angeben; daher ist (§. 138.) auch $\sphericalangle s_1 A s_2$ der Nebenwinkel des Neigungswinkels selbst. —

Beispiel 4. (Fig. 106.) $E_1 AE'_1$ sei die erste, $E_2 'E_2$ die zweite der gegebenen Ebenen, man soll ihren Neigungswinkel bestimmen. Hier verfahre man nach §. 140., und bestimme daher nach §. 110. vor Allem die Communsektion beider Ebenen, indem man die horizontale Projektion s_1

von s'_1 und die vertikale Projektion s'_2 von s_2 angibt, und die Geraden $s_1 s_2$, $s'_1 s'_2$ zieht. Nun lege man das die Communsektion horizontal-projicirende Dreieck in die horizontale Tafel, und bestimme (§. 87. die Länge desjenigen Theiles derselben, welcher zwischen s'_1 und s_2 liegt; wodurch man $s_2 S$ erhält. Nun nehme man M auf $s_2 S$ an, ziehe M p senkrecht auf $s_2 S$, lege durch p eine Gerade senkrecht auf $s_1 s_2$, so kann man letztere als horizontale Spur einer auf der Communsektion senkrechten Hülfsebene betrachten, welche beide Ebenen nach Geraden schneidet, die den Neigungswinkel jener Ebenen bilden, und welche mit der horizontalen Spur der Hülfsebene ein Dreieck bilden, dessen Höhe (§. 140.) M p ist. Macht man nun $p'M = pM$, zieht $a'M$ und $b'M$, so werden letztere die Durchschnittslinien der Hülfsebene mit den beiden gegebenen Ebenen sein, weil a in $E_1 A' E_1$ und der Hülfsebene, und b in $E_2 'E_2$ und der Hülfsebene, M aber in beiden gegebenen Ebenen liegt; folglich ist auch (§. 140.) $< a'Mb$ der Neigungswinkel der beiden Ebenen. Wollte man diesen projiciren, so dürfte man nur M auf $s_1 s_2$ projiciren, wodurch sodann die horizontale Projektion von M erhalten wird, dessen vertikale nach §. 63. bestimmt werden kann. Da nun die horizontale Projektionen von a und b diese Punkte sind, und ihre vertikale Projektionen (§. 70.) in X liegen, so kann leicht jede der Projektionen des Neigungswinkels bestimmt werden. —

Beispiel 5. (Fig. 107.) Es sei $E_1 A_1 'E_1$ die eine, $E_2 A_2 'E_2$ die zweite Ebene, von welchen angenommen ist, dass sie sich auf den Gränzen unserer Tafeln nicht mehr schneiden; man soll ihren Neigungswinkel bestimmen. Hier wende man das in §. 138. angegebene Verfahren an, nehme daher die Projektionen eines Punktes (§. 63.) an, diese seien a und a', ziehe $a' p_1$ senkrecht auf E_1 und $a' p'_1$ senkrecht $'E_1$, so erhält man (§. 84.) die Projektionen einer auf Ebene $E_1 A_1 'E_1$ senkrechten Geraden, die (§. 72.) durch den Punkt geht, dessen Projektionen a und 'a sind. Nun ziehe man ferner $a p_2$ senkrecht auf E_2 und $a' p'_2$ senkrecht auf $'E_2$, so werden diese Linien die Projektionen einer Geraden sein, die (§. 84.) senkrecht auf $E_2 A_2 'E_2$ steht, und (§. 72.) durch den Punkt geht, dessen Projektionen a und 'a sind. Man verlängere nun $'a' p_1$ bis X, so wird s'_1 die vertikale Projektion der horizontalen Spur von $'a p'_1$, $a p_1$, und daher die horizontale Spur dieser Geraden im Durchschnitte von $a p_1$ mit der auf X gezogenen Senkrechten $s'_1 s_1$, also in s_1 (§. 93.) sein. Verlängert man auch $a' p'_2$ bis X, zieht von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte s'_2 auf X eine Senkrechte $s'_2 s_2$, so wird diese von $a p_2$ in s_2 geschnitten, und es ist daher in s_2 (§. 93.) die horizontale Spur von $a p_2$, $a' p'_2$. Zieht man nun $s_1 s_2$, so wird diese Gerade (§. 101.) die horizontale Spur derjenigen Ebene sein, welche $a p_1$, $a' p'_1$ und $a p_2$, $a' p'_2$, und folglich auch den Winkel dieser beiden Geraden enthält. Man drehe daher diese Ebene um $s_1 s_2$, und lege sie in die horizontale Tafel, bestimme sodann in dieser umgelegten Ebene jede der beiden Geraden, so wird auch der Winkel von letzteren sichtbar werden. Zieht man daher a m senkrecht auf $s_1 s_2$, und konstruirt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete a m, und dessen zweite gleich a' n ist, so wird die Hypothenuse dieses Dreieckes von m aus auf m A getragen, in A den Punkt der umgelegten Ebene angeben, dessen Projektionen a und a' sind. Da nun s_1 in der Geraden $a p_1$, $a' p_1$ und s_2 in der Geraden $a p_2$, $a' p'_2$ liegt, beide Punkte aber, nämlich s_1 sowohl als auch s_2 in der Drehungsaxe liegen, so bleiben dieselben auch in der umgelegten Ebene in s_1 und s_2; zieht man daher $s_1 A_1$ so wird diese die Lage der Geraden, deren Projektion $a p_1$ und $a' p'_1$ sind, und $s_2 A$ gezogen die Lage jener Geraden, deren Projektionen durch $a p_2$ und $a' p'_2$ angegeben wurden, in der umgelegten Ebene angeben. Der Winkel nun, welchen diese beide Geraden bilden, nämlich $< s_1 A s_2$ ist der Nebenwinkel des Neigungswinkels beider Ebenen, folglich erhält man durch Verlängerung von $s_2 A$ den Winkel $B A s_1$, der den Winkel beider Ebenen misst. —

§. 142.

Aufgabe 28. Es sind zwei Gerade gegeben, die in verschiedenen Ebenen liegen und ein Punkt ausserhalb dieser Linien; man soll eine Gerade finden, welche durch den gegebenen Punkt geht, und jede der beiden gegebenen Geraden schneidet.

Auflösung. In §. 52. wurde gezeigt, dass es eine Gerade gibt, die durch einen gegebenen Punkt geht und zwei andere Gerade scneidet. Um daher diese Gerade zu bestimmen, verfahre man nach dem in §. 52. bewiesenen Lehrsatze, und zwar auf folgende Weise:

1. Lege man durch den gegebenen Punkt und die erste Gerade nach §. 106. eine Ebene, und sodann bestimme man (§. 106.) diejenige Ebene, welche den gegebenen Punkt und die zweite Gerade enthält.

2. Bestimme man (§. 110.) die Communsektion dieser beiden Hülfsebenen, so wird diese die gesuchte Gerade sein. Denn diese Communsektion liegt mit jeder der gegebenen Geraden in einer dieser Hülfsebenen, und kann mit keiner derselben parallel sein, weil diese Geraden (§. 28.) auch dann unter sich parallel wären; folglich muss die Communsektion beider Hülfsebenen jede der gegebenen Geraden schneiden. Da nun der gegebene Punkt nach Voraussetzung in jeder der Hülfsebenen liegt, so muss sich derselbe auch auf ihrer Communsektion befinden, und folglich ist letztere die gesuchte Gerade. —

Anmerk. 1. Sind drei Gerade gegeben, und man soll eine vierte Gerade finden, welche die drei ersteren schneidet, so nehme man auf einer der gegebenen Geraden einen Punkt (§. 73.) an, lege durch diesen nach dem letzten Paragraph eine Gerade, welche die übrigen zwei Geraden schneidet, so wird diese die gesuchte sein. —

Anmerk. 2. Diese Aufgabe könnte man auch dadurch lösen, dass man durch einen Punkt der ersten Geraden und die zweite Gerade eine Ebene legt, den Durchgangspunkt der dritten Geraden mit dieser Ebene bestimmt, diesen Punkt mit dem auf der ersten angenommenen durch eine Gerade verbindet, so wird letztere die gesuchte sein, weil sie auch die zweite Gerade schneiden muss. —

§. 143.

Beispiel. (Fig. 108.) Es sei a die horizontale und a′ die vertikale Projektion des gegebenen Punktes, L_1, $'L_1$ seien die Projektionen der ersten, L_2, $'L_2$ seien die Projektionen der zweiten Geraden. Soll nun eine Gerade bestimmt werden, welche den gegebenen Punkt enthält, und jede der gegebenen Geraden schneidet, so nehme man (§. 73.) auf den Projektionen L_1 und $'L_1$ die Punkte b und b′ an, welche die Projektionen eines Punktes sind, nehme ferner auf L_2 und $'L_2$ die Punkte c und c′ (§. 73.) an, so dass sie die Projektionen eines einzigen Punktes sind. Nun ziehe man durch aa′ die Gerade ab, $'a'b$ und sodann die Gerade ac, ac′, so wird jene die Gerade $L_1 'L_1$ und diese die Gerade $L_2 'L_2$ (§. 76.) schneiden. Sucht man nun (§. 93.) die horizontale Spur s_1 von $L_1 L'_1$, ferner die horizontale Spur s_2 von ab, $'ab'$, und zieht die Gerade $s_1 s_2$, verlängert dieselbe bis S_1, so erhält man die horizontale Spur der Ebene, in welcher $a'a$ und L_1, $'L_1$ liegt (§. 106.). Bestimmt man (§. 93.) die vertikale Spur s'_3 der Geraden ab, a′b′, und zieht $s'_3 S_1$, so erhält man (§ 80.) die vertikale Spur jener Ebene. Sucht man ferner die horizontalen Spuren s_4 und s_5 der Geraden L_2, $'L_2$ und ac, a′c′ (nach §. 93.), zieht $s_4 s_5$ und verlängert diese Gerade bis S_2, verbindet ferner S_2 mit der (nach §. 93.) gesuchten vertikalen Spur s'_6 der Geraden $L_2 'L_2$, so erhält man (§. 106.) die Spuren jener Ebene, welche den Punkt aa′ und die Gerade ac, a′c′ enthält. Nun suche man (§. 110.) die Communsektion der Ebenen $E_1 S_1 'E_1$ und $E_2 S_2 'E_2$, indem man die Durchschnittspunkte m und n′ ihrer Spuren projicirt, so erhält man durch m′ n′ und mn die Projektionen einer Geraden, welche den Punkt aa′ enthält, die erste Gerade in $p_1 p'_1$ und die zweite in $p_2 p'_2$ schneidet, folglich ist diese die gesuchte Gerade. —

§. 144.

Aufgabe 29. Es sind zwei in verschiedenen Ebenen liegende Gerade und eine Ebene gegeben; man soll in einer von der Ebene angegebenen Entfernung eine Gerade ziehen, welche mit der Ebene parallel ist, und jede der zwei gegebenen Geraden schneidet.

Auflösung. Man nehme eine auf der Ebene senkrechte Gerade nach §. 84. durch ihre Projektionen an, mache diese Gerade von ihrem Durchgangspunkte mit der Ebene aus so lange, als die gegebene Entfernung von der Ebene angibt; vom Endpunkte dieser Senkrechten aus eine Ebene parallel zur gegebenen (§. 118.) gezogen, so wird (§. 25.) jede Gerade, die in dieser Ebene liegt, mit der gegebenen parallel sein. Sucht man daher die Durchgangspunkte der zwei gegebenen Geraden mit dieser Hülfsebene (§. 114.), und verbindet diese beiden Durchgangspunkte durch eine Gerade, so wird diese die verlangten Bedingungen erfüllen, denn sie schneidet die gegebenen zwei Geraden, weil sie zwei Punkte mit denselben gemeinschaftlich hat, ferner ist sie zur gegebenen Ebene parallel, und ist mithin die gesuchte. —

Anmerk. Um in einer gegebenen Entfernung mit einer Ebene eine andere parallel zu ziehen, kann man auf folgende Weise verfahren:

1. Nehme man eine Gerade (nach §. 84. durch ihre Projektionen) an, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht.

2. Bestimme man den Durchgangspunkt dieser Senkrechten mit der Ebene (§. 114.)

3. Lege man eine der projicirenden Ebenen dieser senkrechten Geraden in eine der Tafeln (§. 87.), und schneide vom Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit der Ebene aus auf jener eine Gerade ab, die gleich der gegebenen Entfernung ist.

4. Den Endpunkt dieser Geraden projicire man nun, und lege durch denselben (§. 118.) eine Ebene, die parallel zur gegebenen ist. —

§. 145.

Aufgabe 30. Es ist eine Ebene gegeben, ferner eine auf dieser Ebene liegende Gerade; man soll durch letztere eine Ebene legen, die mit jener Ebene einen gegebenen Winkel bildet.

Auflösung. In §. 140. wurde vermittelst der Communsektion zweier Ebenen und einer auf diese Communsektion senkrecht gelegten Hülfsebene der Winkel beider Ebenen gefunden. Da nun in in der hier vorliegenden Aufgabe sowohl die Communsektion, als auch der Winkel beider Ebenen und eine der letzteren gegeben ist, so wird die andere Ebene leicht gefunden werden können, wenn man auf die in §. 140. angegebene Lösung der 27. Aufgabe Rücksicht nimmt. Wir verfahren daher ganz ebenso, als wenn wir den Winkel zweier Ebenen nach §. 140. suchen wollten, und benützen dabei diejenigen Resultate, welche uns hier zum Ziele führen. Es muss daher Folgendes geschehen:

1. Müssen wir die gegebene Gerade mit einer ihrer projicirenden Ebenen in eine Tafel legen.
2. Nehmen wir auf der in einer Tafel sich nun befindlichen Geraden — Communsektion der gegebenen und der gesuchten Ebene — einen Punkt an, ziehen von diesem aus eine Senkrechte auf die gegebene Gerade, und verlängern diese Senkrechte bis zur horizontalen Projektion der Geraden, so ist diese letztere Senkrechte die Höhe desjenigee Dreieckes, welches den Winkel der gegebenen und der gesuchten Ebene enthält. —
3. Vom Durchschnittspunkte jener Senkrechten mit der horizontalen Projektion der gegebenen Geraden ziehen wir eine Gerade senkrecht auf diese horizontale Projektion, so wird diese die horizontale Spur der Hülfsebene sein, die vom angenommenen Punkte der Geraden aus auf diese senkrecht gezogen wurde. Diese horizontale Spur der Hülfsebene schneidet die horizontale Spur der gegebenen Ebene in einem Punkte, welcher diesen beiden Ebenen, also auch ihrer Communsektion angehört. Wir tragen daher
4. die Höhe des Dreieckes, das den Winkel der gesuchten und der gegebenen Ebene enthält, vom Durchschnittspunkte der horizontalen Spur der Hülfsebene mit der horizontalen Projektion der gegebenen Geraden auf diese, und verbinden den hierdurch erhaltenen Scheitel des Dreieckes mit dem Durchschnittspunkte der horizontalen Spuren der gegebenen und der Hülfsebene durch eine Gerade, so erhalten wir die Communsektion dieser beiden Ebenen.
5. Legen wir an diese Communsektion vom Scheitel des Winkels beider Ebenen aus — der in dem auf der gegebenen Geraden angenommenen Punkte ist — den gegebenen Winkel, so wird vom zweiten Schenkel dieses Winkels die horizontale Spur der Hülfsebene in einem Punkte geschnitten, welcher der horizontalen Spur der gesuchten Ebene (§. 140.) angehört.
6. Verbinden wir diesen Punkt mit der horizontalen Spur der gegebenen Geraden, so erhalten wir also die horizontale Spur der gesuchten Ebene, deren vertikale Spur nun leicht bestimmt werden kann, und zwar entweder dadurch, dass man den Durchschnittspunkt der horizontalen Spur und der Axe mit der vertikalen Spur der gegebenen Geraden verbindet; oder dass man durch einen beliebigen Punkt dieser Geraden eine Gerade legt, die parallel zur horizontalen Spur der gesuchten Ebene ist, so wird diese (§. 120., Anmerk. 2.) in dieser Ebene sein. Sucht man daher von dieser Geraden (§. 95.) die vertikale Spur, und zieht von dieser aus nach der vertikalen Spur der gegebenen Geraden eine Gerade, so ist letztere die vertikale Spur der gesuchten Ebene. —

§. 146.

Beispiel. (Fig. 103.) Ist $E_2 S_2 E_2$ die gegebene Ebene, $s_1 s_2$ die horizontale, $'s_1 's_2$ die vertikale Projektion einer auf dieser Ebene liegenden Geraden, deren vertikale Spur s'_2 und deren horizontale in s_1 ist, endlich a der Winkel, unter welchen eine Ebene an die gegebene gelegt werden soll; so ziehe man $s_2 C$ senkrecht auf $s_2 s_1$, mache $s_2 C = s_2 s'_2$, ziehe $s_1 C$, so ist letztere (§. 87.) die Länge des zwischen s_1 und s'_2 enthaltenen Theiles der gegebenen Geraden. Auf $s_1 C$ nehme man den Punkt M an, ziehe Mp senkrecht auf $s_1 C$, von p aus auf $s_1 s_2$ die Gerade AB senkrecht gezogen, $p'M = pM$ gemacht und $'MB$ gezogen, so wird letztere die Communsektion der Hülfsebene und der gegebenen Ebene sein. Legt man nun in M' an $'MB$ den Winkel $AM'B = a$ an, so erhält man den Punkt A, welcher der Hülfsebene und der gesuchten angehört, durch welchen also die horizontale Spur der gesuchten Ebene gehen muss. Zieht man also von s_1 nach A die Gerade $s_1 AS$, so wird diese die horizontale Spur der gesuchten Ebene sein. Die vertikale Spur dieser Ebene wird

erhalten, wenn man von S_1 nach s'_2 die Gerade $S_1 s'_2$ zieht. —

§. 147.

Aufgabe 51. Ein Punkt ist durch seine Projektionen gegeben; man soll denselben um eine in einer Tafel liegende Gerade unter einen bestimmten Winkel bewegen, und seine Projektionen bestimmen, wenn er an seinem neuen Orte liegt.

Auflösung. Bewegt sich ein Punkt um eine Gerade, so beschreibt derselbe (§. 23.) einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe steht. Denkt man sich daher vom Punkte aus auf die Drehungsaxe (§. 120.) eine Ebene senkrecht gelegt, so wird letztere diejenige sein, in welcher der Punkt während und nach seiner Bewegung bleibt. Der Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der Drehungsaxe (der nach §. 114. bestimmt wird) ist der Mittelpunkt des Kreisbogens, welchen der Punkt beschreibt, und der Halbmesser dieses Kreisbogens ist die Entfernung des Punktes von der Drehungsaxe, welche letztere nach §. 122. bestimmt werden kann. Denkt man sich nun ferner in dieser (auf der Drehungsaxe senkrechten und durch den gegebenen Punkt gehenden) Ebene in dem Durchschnittspunkte derselben mit der Drehungsaxe an die vom Punkte auf letztere gezogene Senkrechte den Winkel gelegt, um welchen der Punkt auf- oder abwärts bewegt werden soll, und auf den zweiten Schenkel dieses Winkels von seinem Scheitel aus die Entfernung des Punktes von der Durchgangsaxe getragen, so erhält man die neue und verlangte Lage des gegebenen Punktes, und man hat nun auch seine neuen Projektionen zu bestimmen. Um nun diese leicht zu erhalten, kann man die vom Punkte aus auf die Drehungsaxe senkrecht gezogene Ebene mit dem Punkte in eine der Tafel (nach §. 130.) umlegen, in dieser die vorhin angezeigte Construktion vornehmen, sodann die Ebene wieder in ihre erste Lage bringen, und (§. 132.) die neuen Projektionen bestimmen. —

In unserem vorliegenden Falle wird die Construktion einfacher, weil die Drehungsaxe in einer der Tafeln liegen soll. Ist z. B. die Gerade, um welche der Punkt bewegt werden soll, in der horizontalen Tafel, und man denkt sich vom Punkte aus auf die Drehungsaxe eine Ebene senkrecht gezogen, so wird letztere (§. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel, und folglich wird (§. 83., Anmerk.) in der horizontalen Spur dieser Ebene die horizontale Projektion des Punktes liegen müssen, oder die horizontale Spur jener Ebene, die man vom Punkte aus auf die Drehungsaxe senkrecht zieht, muss durch die horizontale Projektion des Punktes gehen. Da aber diese horizontale Spur (§. 84.) senkrecht auf unserer Drehungsaxe sein muss, so wird die Senkrechte, die man von der horizontalen Projektion des gegebenen Punktes auf die Drehungsaxe zieht, die horizontale Spur jener Ebene sein, welche man vom gegebenen Punkte aus auf die Drehungsaxe senkrecht legen kann, und der Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit der Drehungsaxe ist der Mittelpunkt des Kreisbogens, welchen der Punkt bei seiner Bewegung beschreibt. Legen wir nun diese auf der Drehungsaxe senkrechte Ebene (in welcher der Punkt während und nach der Drehung bleibt) um ihre horizontale Spur (§. 130.) in die horizontale Tafel, und bestimmen (§. 130.) die Lage des gegebenen Punktes in dieser umgelegten Ebene, ziehen von diesem Punkte nach dem Mittelpunkte seines Kreisbogens eine Gerade, und legen an diese den gegebenen Winkel, so erhalten wir den neuen Ort des Punktes, wenn wir auf den zweiten Schenkel des angelegten Winkels seine Entfernung von der Drehungsaxe vom Scheitel dieses Winkels aus tragen. Nun bleibt (§. 23.) der Punkt in der auf der Drehungsaxe senkrecht gelegten Ebene, folglich auch seine horizontale Projektion (§. 83., Anmerk.) in der horizontalen Spur dieser Ebene; wenn wir daher von der neuen Lage des Punktes in der umgelegten Ebene auf die horizontale Spur der letzteren eine Senkrechte ziehen, so wird diese die horizontal-projicirende Linie des Punktes, und mithin ihr Fuss die horizontale Projektion des Punktes sein. Diese horizontal-projicirende Linie ist aber (§. 63.) gleich der vertikalen Ordinate des Punktes, folglich kann seine neue vertikale Projektion leicht erhalten werden, wenn man (§. 63.) von der horizontalen Projektion des Punktes aus auf X eine Senkrechte zieht, die in der vertikalen Tafel oder deren rückwärtiger Verlängerung liegt, und auf diese Senkrechte von der Axe aus die horizontal-projicirende Linie des Punktes trägt. —

Anmerk. Würde die Gerade, um welche der Punkt bewegt werden soll, in der vertikalen Tafel sich befinden, so könnte man bei der Aufsuchung der neuen Projektionen des Punktes eine ähnliche Construktion befolgen, als die vorhin gezeigte. Auf gleiche Weise kann man auch ein ganzes System von Punkten um eine Gerade drehen, und in dieser neuen Lage seine Projektion bestimmen. Sind nun die einzelnen Punkte dieses Systemes durch Gerade verbunden, so kann man leicht die Projektionen des Vieleckes oder des Polyeders, deren Scheitel die gegebenen Punkte sind, nach der Dre-

hung bestimmen. — Die Anwendung dieser Aufgabe hat besonders da ihren Vortheil, wo man eine Projektion eines Gegenstandes erhalten will, die genaueren Aufschluss über denselben gibt, als die angegebenen Projektionen. —

§. 148.

Beispiel 1. (Fig. 109.) Es sei m_1 die horizontale und m'_1 die vertikale Projektion eines Punktes, xy eine Gerade, um welche der angegebene Punkt sich aufwärts bewegen soll, und zwar so, dass die Gerade, welche man von demselben auf xy senkrecht zieht mit derjenigen Senkrechten, die man aus seiner neuen Lage auf xy zieht, den Winkel r bildet. Vor Allem ziehe man also $m_1 C$ senkrecht auf xy, so ist diese Gerade $m_1 C$ die horizontale Spur der Ebene, in welcher der Punkt $m_1 m'_1$ vor und nach der Drehung bleibt. Legt man nun diese Ebene um $m_1 C$ in die horizontale Tafel, zieht $m_1 M_1$ senkrecht auf $m_1 C$, macht $m_1 M_1 = m'_1 n_1$, so erhält man (§. 130.) die Lage des Punktes $m_1 m'_1$ in der umgelegten Ebene, und $M_1 C$ wird die Entfernung desselben von xy sein. In C lege man nun an CM_1 den Winkel $M_1 C M_2 = < r$, mache $CM_2 = CM_1$, so ist M_2 die neue Lage des Punktes in der umgelegten Ebene. Zieht man $M_2 m_2$ senkrecht auf $m_1 C_1$ so muss m_2 die horizontale Projektion des Punktes M_2 (§. 147.), und $M_2 m_2$ seine vertikale Ordinate sein. Zieht man daher $m_2 n_2$ senkrecht auf X, und macht $n_2 m'_2$ gleich $M_2 m_2$, so wird in m'_2 die vertikale Projektion des Punktes sein, dessen horizontale in m_2 ist, und man hat also die Projektionen $m_2 m'_2$ der neuen Lage des gegebenen Punktes im Raume. —

Beispiel 2. (Fig. 110.) In der horizontalen Tafel liege das regelmässige Sechseck $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$; man soll dasselbe um xy drehen, bis seine Ebene mit der horizontalen Tafel den Winkel von 45° bildet. Man ziehe $a_1 C_1$ senkrecht auf xy, lege in C_1 den Winkel $A C_1 a_1 = 45°$ an, mache $C_1 A = C_1 a_1$, so wird A die neue Lage von a_1 sein, und in der von a_1 auf xy senkrecht gezogenen Ebene liegen. Zieht man nun $A a_2$ senkrecht auf $a_1 C_1$ so wird a_2 die horizontale Projektion und $A a_2$ die vertikale Ordinate des Punktes A sein. Auf gleiche Weise erhält man die neuen Projektionen $b_2 b'_2$, $c_2 c'_2$, $d_2 d'_2$, $e_2 e'_2$ und $f_2 f'_2$ der gegebenen Punkte a_1, c_1, d_1, e_1 und f_1. Zieht man nun die Geraden $a_2 b_2$, $b_2 c_2$, $c_2 d_2$, $d_2 e_2$, $e_2 f_2$ und $f_2 a_2$, so erhält man die verlangten Projektionen $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2$, $a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 c'_2 f'_2$ des Sechseckes, das ursprünglich in $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1$ war, und dessen Ebene nun (nach §. 126.) mit der horizontalen Tafel den Winkel von 45° bildet. —

Beispiel 3. (Fig. 111.) Es sei $a_1 b_1 c_1 d_1$ die horizontale und $a_1 b_1$ oder $d'_1 c'_1$ die vertikale Projektion eines Quadrates, man soll dasselbe so drehen, dass seine Ebene mit der horizontalen Tafel (oder mit einer zu dieser Tafel parallelen Ebene) einen Winkel von 60° bildet. Um diese Aufgabe zu lösen, ziehe man von a_1 auf xy die Gerade $a_1 n_1$ senkrecht, so ist diese (§. 147.) die horizontale Spur der Ebene des Kreisbogens, welchen der Punkt $a_1 a'_1$ bei seiner Bewegung beschreibt. Legt man nun diese Ebene um $a_1 n_1$ in die horizontale Tafel, zieht $a_1 A_1$ senkrecht auf $a_1 a_2$, macht $a_1 A_1 = m_1 a'_1$, legt in n_1 an $n_1 A_1$ den Winkel $A_1 n_1 A_2 = 60°$ an, und trägt $n_1 A_1$ auf $n_1 A_2$, so erhält man in A_2 die neue Lage des Punktes $a_1 a'_1$. Von A_2 aus auf $a_1 n_1$ die Senkrechte $A_2 a_2$ gezogen, ferner $a_2 m_2$ senkrecht auf X gefällt. und $m_2 a'_2$ gleich $A_2 a_2$ gemacht, gibt in a'_2 die neue vertikale Projektion des Punktes $a_1 a'_1$, dessen horizontale Projektion a_2 ist. Auf gleiche Weise kann man die Projektionen $b_2 b'_2$, $c_2 c'_2$, $d_2 d'_2$, und mithin auch die neuen Projektionen $a_2 b_2 c_2 d_2$, $a'_2 b'_2 c'_2 d'_2$ bestimmen, das vorher parallel zur horizontalen Tafel war, und nun mit letzterer einen Winkel von 60° macht. —

§. 149.

Zum Schlusse dieser Abtheilung sollen noch einige Aufgaben zur Uebung angegeben werden, deren Lösungen im Anhange kurz angezeigt werden sollen. —

1. Es ist eine Gerade im Raume gegeben; man soll auf derselben einen Punkt bestimmen, der von einem auf ihr gegebenen eine bestimmte Entfernung hat. —

2. Die Projektionen eines Punktes und die einer Geraden sind gegeben, die jenen nicht enthält; man soll auf der Geraden den Punkt aufsuchen, welcher vom gegebenen Punkte eine bestimmte Entfernung hat. —

3. Durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, die senkrecht auf einer gegebenen Ebene steht.

4. Von einer Ebene ist eine Spur bekannt, und ferner sind die Projektionen eines auf derselben liegenden Punktes gegeben; man soll die übrigen Spuren der Ebene bestimmen. —

5. In einer gegebenen Entfernung mit einer angegebenen Ebene eine andere parallel zu ziehen.

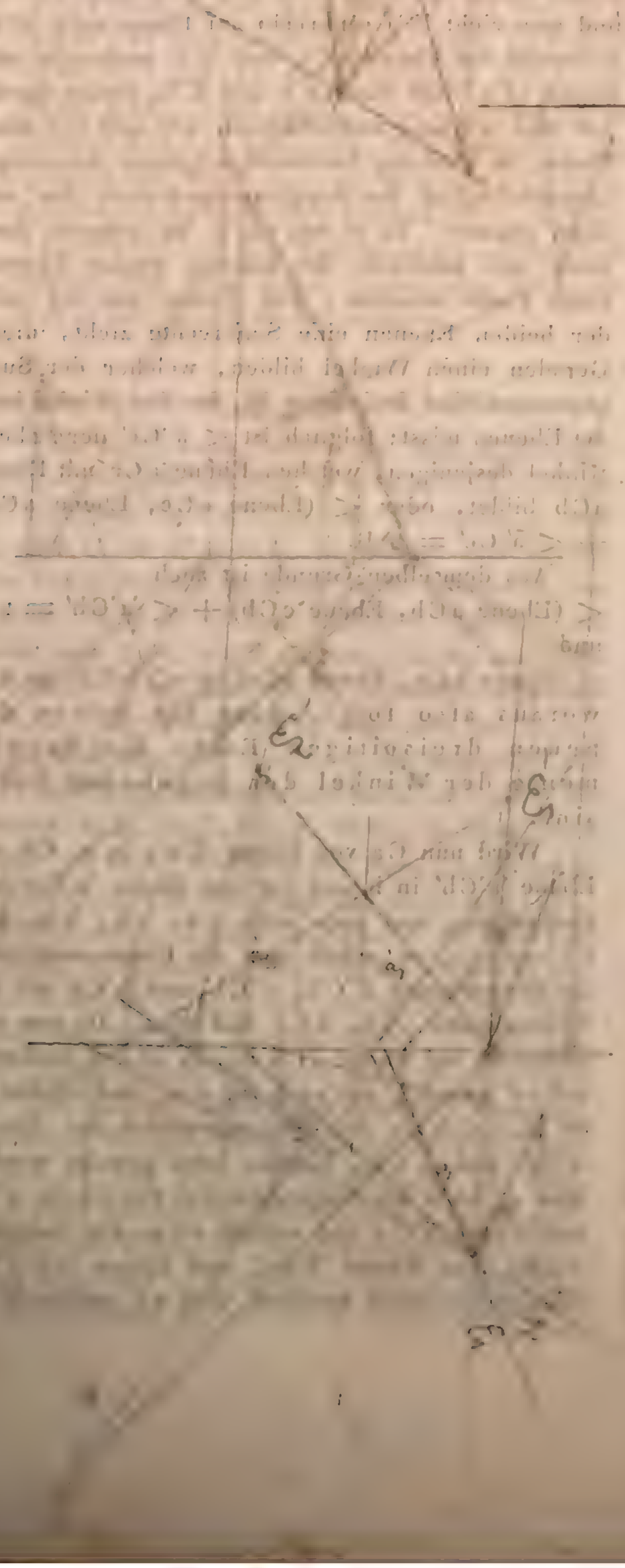
6. Es ist eine Gerade, die im Raume liegt, durch ihre Projektionen gegeben; man soll in einer von dieser Geraden angegebenen Entfernung eine andere zu jener parallel ziehen.

7. Durch einen gegebenen Punkt soll eine Gerade gezogen werden, die mit einer gegebenen Geraden einen bestimmten Winkel macht. —

8. Den Winkel zweier sich schneidenden Geraden zu halbiren.

9. Drei Gerade sind gegeben, die in verschiedenen Ebenen liegen; man soll eine vierte bestimmen, welche jede der drei ersteren schneidet. —

10. Eine Ebene und ein auf derselben angegebenes Viereck so zu drehen, bis sie mit der vertikalen Tafel einen Winkel von 45° einschliesst, und die neuen Spuren der Ebene, so wie die Projektionen des Viereckes anzugeben. —



Dritte Abtheilung.

Viertes Kapitel.

Dreiseitiges körperliches Eck.

§. 150.

Im §. 54. wurde die Erklärung eines dreiseitigen körperlichen Eckes gegeben, und gezeigt, dass die Summe zweier Linienwinkel desselben grösser ist, als der dritte. Wir wollen nun die drei Linienwinkel des dreiseitigen körperlichen Eckes seine Seiten, und die Winkel, welche die die Ebenen dieser Seiten unter einander bilden, Winkel des dreiseitigen Eckes nennen. Beshreiben wir aus dem Scheitel desselben mit einem beliebigen Halbmesser eine Kugel, so wird letztere von den Ebenen seiner Seiten nach grössten Kreisen geschnitten, von welchen die Bögen, welche zwischen den Kanten des Eckes liegen, seine Seiten messen.

Der Theil der Kugeloberfläche, welcher zwischen den drei Seiten des körperlichen Eckes liegt, wird von Bögen der drei grössten Kreise begränzt, nach welchen die Kugel von den Seitenebenen des Eckes geschnitten wird und man nennt diesen Theil ein sphärisches Dreieck. Die drei Bögen, welche dieses sphärische Dreieck begränzen, werden seine Seiten, und die Winkel, welche die Ebenen dieser Bögen, also die Seiten des dreiseitigen körperlichen Eckes unter sich bilden, werden Winkel des sphärischen Dreieckes genannt. Man ersieht also hieraus, dass man die Seiten des sphärisehen Dreieckes mit den Winkeln des dreiseitigen körperlichen Eckes, und die Winkel des letzteren mit den Winkeln des sphärischen Dreieckes verwechseln kann, wenn der Halbmesser der Kugel bekannt ist, auf deren Oberfläche sich das sphärische Dreieck befindet. —

Anmerk. Unter Kugel versteht man nämlich einen Körper, der von einer einzigen krummen Fläche so begränzt wird, dass alle beliebigen Punkte dieser Fläche von einem bestimmten Punkte dieselben Entfernungen haben. Dieser bestimmte Punkt wird Mittelpunkt, und die Entfernung eines Punktes der krummen Fläche von demselben, Halbmesser genannt.

§. 151.

Nimmt man in einem solchen dreiseitigen körperlichen Ecke einen beliebigen Punkt an, zieht von diesem aus senkrechte Gerade auf die Seitenebenen des Eckes, und legt durch je zwei dieser Senkrechten eine Ebene, so erhält man ein neues dreiseitiges Eck, welches mit dem vorigen in einem bestimmten Zusammenhange steht, und deshalb Supplementar- oder Ergänzungsdreieck genannt wird. (Fig. 112.) Ist nämlich aCb die erste Seite, bCc die zweite, und cCa die dritte Seite des gegebenenen Eckes, 'C ein innerhalb dieses körperlichen Raumes angenommener Punkt, und man zieht 'C'a senkrecht auf Ebene acb, 'C'b senkrecht auf Ebene bCc und 'C'c senkrecht auf Ebene aCc, legt durch a''C und 'C'b, ferner durch 'b'C und 'c'C und endlich durch 'c'C und 'C'a eine Ebene, so wird das hierdurch erhaltene dreiseiiige körperliche Eck das Supplementardreieck des vorigen genannt. Es ist nun aus §. 50. bekannt, dass wenn man innerhalb des Raumes zweier Ebenen einen Punkt annimmt, von diesem aus auf jede der beiden Ebenen eine Senkrechte zieht, diese Geraden einen Winkel bilden, welcher der Supplementswinkel desjenigen ist, der den Winkel beider Ebenen misst; folglich ist $< a''Cc'$ der Nebenwinkel desjenigen, welchen Ebene aCc mit Ebene aCb bildet, oder $<$ (Ebene aCc, Ebene aCb) $+ < a''Cc' = 2$ R.

Aus demselben Grunde ist auch

$<$ (Ebene aCb, Ebene cCb) $+ < 'a'Cb' = 2$ R

und

$<$ (Ebene bCc, Ebene cCa) $+ < 'b'Cc' = 2$ R

woraus also folgt, dass die Seiten des neuen dreiseitigen Eckes die Supplemente der Winkel des gegebenen Eckes sind.

Wird nun Ca von Ebene 'C'a'c in a, Cb von Ebene 'a'Cb' in b und Cc von Ebene 'b'C'c in c geschnitten, und man zieht a'a, 'ab, b'b, b'c, c'c und 'ca, so erhält man die Communsektionen der Seitenebenen a''C'c, a''Cb' und 'b'Cc' mit den Seitenebenen aCb, bCc und cCa. Da nun a'C' senkrecht auf Ebene aCb ist, so ist 'a'C senkrecht auf aa' sowohl, als auch auf a'b, uud mithin ist (§. 43.) $<$ ba'a der Neigungswinkel der Ebenen 'a'Cc' und 'a'Cb. Ebenso kann gezeigt werden, dass $<$ bb'c der Neigungswinkel von Ebene a''C'b und Ebene b'C'c' und endlich cc'a, der Neigungswinkel von Ebene 'b'Cc' und Ebene 'c'Ca' ist. Nun wurde schon eewähnt, dass aa' senkrecht auf

a C in Ebene a C b, und in derselben Ebene 'a b senkrecht auf b C ist (weil Ebene 'a 'C c' senkrecht auf a C und Ebene 'a 'C 'b senkrecht auf b C nach §. 48. sein muss), daher ist $< a'b'b + < aCb$ gleich 2 R, oder ein Winkel des neuen körperlichen Eckes ist Ergänzungswinkel zu einer Seite des gegebenen dreiseitigen körperlichen Eckes. Ebenso kann auch gezeigt werden, dass $< b'bc + < bCc = 2R$ und $< ac'c + < aCc = 2$ R. Nimmt man nun diese beiden Sätze zusammen, so erhält man folgenden Satz:

Zieht man von einem beliebigen Punkte des körperlichen Raumes eines dreiseitigen Eckes auf seine drei Seiten senkrechte Gerade, und legt durch je zwei der letzteren eine Ebene, so erhält man ein neues dreiseitiges körperliches Eck, dessen Seiten die Supplementswinkel von den Winkeln des gegebenen, und dessen Winkel die Supplementswinkel der Seiten des gegebenen dreiseitigen Eckes sind. Man nennt deshalb das eine dieser dreiseitigen Ecke das Supplementareck des anderen. —

§. 152.

(Fig. 113.) Ist S_1 sowohl, als auch S_2 ein dreiseitiges körperliches Eck, und zwar $< A_1 S_1 B_1 = < A_2 S_2 B_2$, $< A_1 S_1 C_1 = < A_2 S_2 C_2$ und $< B_1 S_1 C_1 = < B_2 S_2 C_2$, so müssen auch in beiden Ecken die den gleichen Seiten gegenüber stehenden Winkel einzeln einander gleich sein. Macht man $S_1 B_1 = S_2 B_2$, zieht $B_1 M_1$ senkrecht auf Ebene $A_1 S_1 C_1$ und $B_2 M_2$ senkrecht auf Ebene $A_2 S_2 C_2$, fällt ferner $M_1 A_1$ senkrecht auf $S_1 A_1$, $M_1 C_1$ senkrecht auf $S_1 C_1$, $M_2 A_2$ senkrecht auf $S_2 A_2$ und $M_2 C_2$ senkrecht auf $S_2 C_2$, und zieht die Geraden $B_1 A_1$, $B_1 C_1$, $B_2 A_2$, $B_2 C_2$, so muss (nach §. 24., 1.) $B_1 A_1$ senkrecht auf $S_1 A_1$, $B_1 C_1$ senkrecht $S_1 C_1$, $B_2 A_2$ senkrecht auf $S_2 A_2$ und $B_2 C_2$ senkrecht auf $S_2 C_2$ sein. Da nun $B_1 A_1$ senkrecht auf $A_1 S_1$ in Ebene $A_1 S_1 B_1$, $M_1 A_1$ senkrecht auf $A_1 B_1$ in Ebene $A_1 S_1 C_1$ ist, so muss auch (nach §. 43.) der Winkel, welchen Ebene $A_1 S_1 B_1$ mit Ebene $A_1 S_1 C_1$ macht durch $< B_1 A_1 M_1$ gemessen sein. Auf gleiche Weise kann man sich überzeugen, dass $< B_1 C_1 M_1$ der Neigungswinkel der Ebenen $B_1 S_1 C_1$ und $A_1 S_1 C_1$, $< B_2 A_2 M_2$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_2 S_2 B_2$ und $A_2 S_2 C_2$ und endlich $< B_2 C_2 M_2$ der Neigungswinkel der Ebenen $B_2 S_2 C_2$ und $A_2 S_2 C_2$ ist. Nun ist nach Annahme $S_1 B_1 = S_2 B_2$ und $< B_1 S_1 A_1 = < B_2 S_2 A_2$, und nach Construktion $< B_1 A_1 S_1 = < B_2 A_2 S_2 = R$, mithin ist $\triangle A_1 B_1 S_1 \overline{\simeq} \triangle A_2 B_2 S_2$, und daher

1. $A_1 S_1 = A_2 S_2$,
2. $A_1 B_1 = A_2 B_2$.

   Man hat nun ferner nach Annahme $B_1 S_1 = B_2 S_2$ und $< B_1 S_1 C_1 = < B_2 S_2 C_2$, ferner ist nach Construktion $< B_1 C_1 S_1 = < B_2 C_2 S_2 = R$, daher $\triangle B_1 S_1 C_1 \overline{\simeq} \triangle B_2 S_2 C_2$ und daher auch
3. $S_1 C_1 = S_2 C_2$ und
4. $B_1 C_1 = B_2 C_2$. Legt man nun S_1 auf S_2, $S_1 A_1$ in die Richtung von $S_2 A_2$, so muss A_1 auf A_2, $S_1 C_1$ in die Richtung von $S_2 C_2$ und C_1 auf C_2 fallen. Da aber $< S_1 A_1 M_1 = < S_2 A_2 M_2 = R$ und $< S_1 C_1 M_1 = < S_2 C_2 M_2 = R$ ist, so muss auch ferner $A_1 M_1$ in die Richtung von $A_2 M_2$ und $C_1 M_1$ in die Richtung von $C_2 M_2$ fallen, und es ist daher auch
5. $A_1 M_1 = A_2 M_2$ und
6. $C_1 M_1 = C_2 M_2$. Nun ist aber ferner $< B_1 M_1 A_1 = < B_2 M_2 A_2 = R$, daher ist auch
7. $\triangle A_1 B_1 M_1 \overline{\simeq} \triangle A_2 B_2 M_2$, folglich
8. $< B_1 A_1 M_1 = < B_2 A_2 M_2$ und
9. $B_1 M_1 = B_2 M_2$.

   Ferner ist
10. $\triangle B_1 C_1 M_1 \overline{\simeq} \triangle B_2 M_2 C_2$, daher auch
11. $< B_1 C_1 M_1 = < B_2 C_2 M_2$, und es folgt also, dass der der Seite $A_1 S_1 B_1$ gegenüber stehende Winkel des einen Eckes, gleich dem Winkel des andern Eckes ist, welcher der Seite $A_2 S_2 B_2$ gegenüber steht, und dass ferner der im einen Ecke der Seite $B_1 S_1 C_1$ gegenüber liegende Winkel gleich dem des andern Eckes ist, welcher der Seite $B_2 S_2 C_2$ gegenüber liegt. Um nun die Gleichheit der übrigen zwei Winkel zu zeigen, legen wir von B_1 aus auf $B_1 S_1$ eine Ebene senkrecht, und es sei deren Durchschnitt mit Ebene $A_1 S_1 B_1$ die Gerade $B_1 D_1$ und ihr Durchschnitt mit Ebene $B_1 S_1 C_1$ sei $B_1 E_1$. Ferner ziehen wir von B_2 aus auf $S_2 B_2$ eine Ebene senkrecht, und es sei der Durchschnitt derselben mit der Ebene $A_2 S_2 B_2$ die Gerade $D_2 B_2$ und $E_2 B_2$ sei der Durchschnitt dieser Hülfsebene mit Ebene $B_2 S_2 C_2$. Da nun Ebene $D_1 B_1 E_1$ senkrecht auf $S_1 B_1$ ist, so hat man (§. 7.)

1. $< S_1 B_1 D_1 = R$
2. $< S_1 B_1 E_1 = R$

   und mithin ist (§. 43.) $< D_1 B_1 E_1$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_1 S_1 B_1$ und $B_1 S_1 C_1$. Analog wird
3. $< S_2 B_2 D_2 = R$ und

4. $< S_2 B_2 E_2 = R$, und mithin (§. 43.) $< D_2 B_2 E_2$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_2 B_2 S_2$ und $B_2 S_2 C_2$. —

Da nun $S_1 B_1 = S_2 B_2$, $< S_1 B_1 D_1 = < S_2 B_2 D_2$ und $< B_1 S_1 D_1 = < B_2 S_2 D_2$, so hat man

5. $\triangle D_1 B_1 S_1 \overline{\sim} \triangle D_2 B_2 S_2$, daher auch

6. $B_1 D_1 = B_2 D_2$.

Ferner hat man, weil $S_1 B_1 = S_2 B_2$, $< B_1 S_1 E_1 = < B_2 S_2 E_2$ und $< S_1 B_1 E_1 = < S_2 B_2 E_2$, auch

7. $S_1 E_1 = S_2 E_2$ und 8. $B_1 E_1 = B_2 E_2$.

Hieraus ist nun $D_1 S_1 = D_2 S_2$, $E_1 S_1 = E_2 S_2$ und nach Annahme war $< D_1 S_1 E_1 = < D_2 S_2 E_2$, folglich wird auch

9. $\triangle D_1 S_1 E_1 \overline{\sim} \triangle D_2 S_2 E_2$ und daher

10. $D_1 E_1 = D_2 E_2$.

Nun ist $D_1 B_1 = D_2 B_2$, $E_1 B_1 = E_2 B_2$ und $D_1 E_1 = D_2 E_2$, folglich wird $\triangle D_1 B_1 E_1 \overline{\sim} \triangle D_2 B_2 E_2$ und daher auch

11. $< D_1 B_1 E_1 = < D_2 B_2 E_2$.

Aus diesem Ganzen folgt also:

1. Sind die drei Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes einzeln gleich den drei Seiten eines andern körperlichen dreiseitigen Eckes, so sind auch die Winkel des einen dreiseitigen Eckes einzeln gleich den Winkeln des andern.
2. Die Perpendikel, welche man von den Endpunkten zweier entsprechenden und gleichen Kanten dieser beiden Ecke auf die gegenüberliegenden Ebenen ziehen kann, sind einander gleich.

Anmerk. 1. Aus dem (in 1.) ausgesprochenen Lehrsatze folgt, dass wenn drei Winkel gegeben sind, von welchen die Summe zweier grösser, als der dritte ist, ein körperliches dreiseitiges Eck aus diesen Winkeln als Seiten konstruirt werden kann, dessen Winkel konstant sind; denn wenn man ein zweites dreiseitiges Eck aus diesen gegebenen drei Seiten konstruirt, so müssen die Winkel des letzteren einzeln gleich den Winkeln des ersteren sein. Man kann also aus den drei Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes seine drei Winkel finden.

Anmerk. 2. In §. 151. wurde gezeigt, dass für ein dreiseitiges Eck ein anderes bestimmt werden kann, dessen Seiten die Supplemente der Winkel und dessen Winkel die Supplemente der Seiten des gegebenen Eckes sind. Wenn daher von einem dreiseitigen körperlichen Ecke die drei Winkel bekannt sind, und man sucht ihre Supplemente, so erhält man die Seiten des Supplementareckes. Aus diesen Seiten kann man aber die Winkel des letzteren (Anmerk. 1.) finden, und da diese die Supplemente der Seiten des ersten Eckes sind, so wird man diese finden, wenn man die Winkel des Supplementareckes bestimmt, und diese einzeln zu 2 R ergänzt. Hieraus ersieht man also, dass aus den drei Winkeln eines körperlichen dreiseitigen Eckes auch seine drei Seiten bestimmt werden können.

Anmerk. 3. Sind die drei Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes einzeln gleich den drei Seiten eines zweiten dreiseitigen Eckes, und folgen die Seiten des ersten Eckes in derselben Ordnung auf einander, wie die des zweiten, so sind nicht allein die Winkel des ersten einzeln gleich den Winkeln des zweiten Eckes, sondern man kann auch dann diese beiden dreiseitigen Ecke so in einander bringen, dass sie sich vollkommen decken. Diess kann leicht aus dem vorigen §. ersehen werden. —

Anmerk. 4. Liegen die Seiten $A_1 S_1 B_1$ und $B_1 S_1 C_1$ in Bezug auf $S_1 B_1$ ebenso, wie die Seiten $A_2 S_2 B_2$ und $B_2 S_2 C_2$ in Bezug $S_2 B_2$, haben ferner die Senkrechten $B_1 M_1$ und $B_2 M_2$ gleiche Richtung, so haben die drei Seiten des einen dieselbe Ordnung, wie die des andern Eckes, und beide Ecke sind kongruent, wenn sie ihre Seiten einzeln gleich haben. Haben die Perpendikel $B_1 M_1$ und $B_2 M_2$ entgegengesetzte Richtung, so sind die körperlichen Ecke symetrisch gleich.

Anmerk. In §. 150. wurde schon erwähnt, dass, wenn man aus dem Scheitel eines körperlichen dreiseitigen Eckes als Mittelpunkt eine Kugel sich beschrieben denkt, ein sphärisches Dreieck erhalten wird, dessen Seiten durch die Seiten des Eckes und dessen Winkel auch durch die Winkel des Eckes bestimmt sind. Was daher vorher vom körperlichen dreiseitigen Ecke dargethan wurde, gilt auch für das sphärische Dreieck. Wenn also die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes bekannt sind, so können auch seine Winkel bestimmt werden, und aus seinen Winkeln kann man seine Seiten bestimmen. —

§. 153.

(Fig. 115.) Ist $< A_1 S_1 B_1 = < A_2 S_2 B_2$, $< A_1 S_1 C_1 = < A_2 S_2 C_2$ und der Neigungswinkel der Ebenen $A_1 S_1 B_1$ und $A_1 S_1 C_1$ gleich dem Neigungswinkel der Ebenen $A_2 S_2 B_2$ und $A_2 S_2 C_2$, so kann gezeigt werden, dass $< B_1 S_1 C_1 = < B_2 S_2 C_2$ ist. Denn macht man dieselbe Construktion, die im vor. §. ausgeführt wurde, schneidet nämlich $S_1 B_1 = S_2 B_2$ ab, zieht $B_1 M_1$ senkrecht auf Ebene $A_1 S_1 C_1$, und $B_2 M_2$ senkrecht auf Ebene $A_2 S_2 C_2$, fällt von M_1 auf $S_1 A_1$ die Senkrechte $M_1 A_1$ und von M_2 auf $S_2 A_2$ die Gerade $M_2 A_2$ senkrecht, und zieht die Geraden $B_1 A_1$ und $B_2 A_2$, so wird (§. 24., 1.) $B_1 A_1$ senkrecht auf $S_1 A_1$ und $B_2 A_2$ senkrecht auf $S_2 A_2$ stehen; folglich ist (§. 43.) $< B_1 A_1 M_1$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_1 S_1 B_1$ und $A_1 S_1 C_1$ und $< B_2 A_2 M_2$ der Neigungswinkel der Ebenen $A_2 S_2 B_2$ und $A_2 S_2 C_2$ sein. Nun hat man schon nach vor. §. $A_1 S_1 = A_2 S_2$ und $A_1 B_1 = A_2 B_2$, und da $< B_1 A_1 M_1 = < B_2 A_2 M_2$ nach Voraussetzung und $< B_1 M_1 A_1 = < B_2 M_2 A_2 = R$ ist, so muss auch

1. $\triangle A_1 B_1 M_1 \overline{\sim} \triangle A_2 B_2 M_2$, folglich
2. $B_1 M_1 = B_2 M_2$ und
3. $A_1 M_1 = A_2 M_2$

Es ist nun $< A_1 S_1 C_1 = < A_2 S_2 C_2$ nach Voraussetzung,

$S_1 A_1 = S_2 A_2$ nach vor. §.,

$< S_1 A_1 M_1 = < S_2 A_2 M_2 = R$,

$A_1 M_1 = A_2 M_2$ nach 1. dieses §.

$S_1 C_1 M_1 = < S_2 C_2 M_2 = R$,

folglich muss auch

$< A_1 M_1 C_1 = < A_2 M_2 C_2$ und daher

4. $M_1 C_1 = M_2 C_2$ und
5. $S_1 C_1 = S_2 C_2$

Da also

$B_1 M_1 = B_2 M_2$

$M_1 C_1 = M_2 C_2$

und

$< B_1 M_1 C_1 = < B_2 M_2 C_2 = R$.

so hat man auch

6. $\triangle B_1 S_1 C_1 \overline{\sim} \triangle B_2 S_2 C_2$, daher
7. $B_1 C_1 = B_2 C_2$
8. $< B_1 C_1 M_1 = < B_2 C_2 M_2$

Man hatte aber auch

$S_1 B_1 = S_2 B_2$ und da (nach 5. und 7. dieses §.)

$S_1 C_1 = S_2 C_2$ und

$B_1 C_1 = B_2 C_2$ ist, so wird endlich

9. $\triangle S_1 B_1 C_1 \overline{\sim} \triangle S_2 B_2 C_2$ und daher
10. $< B_1 S_1 C_1 = < B_2 S_2 C_2$

Nun wurde zugleich gezeigt, dass $< B_1 C_1 M_1 = < B_2 C_2 M_2$, also $<$ (Ebene $B_1 S_1 C_1$, Ebene $A_1 S_1 C_1$) $= <$ (Ebene $B_2 S_2 C_2$, Ebene $A_2 S_2 C_2$) und nach vor. §. muss nun auch $<$ (Ebene $A_1 S_1 B_1$, Ebene $B_1 S_1 C_1$) $= <$ (Ebene $A_2 S_2 B_2$, Ebene $B_2 S_2 C_2$) sein. Es folgt also hieraus der Satz:

Sind zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes, einzeln gleich zweien Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel eines andern dreiseitigen körperlichen Eckes, so müssen auch die dritte Seite und die beiden übrigen Winkel des einen Eckes einzeln gleich der dritten Seite und den beiden übrigen Winkeln des andern Eckes sein. —

Anmerk. 1. Aus dem letzten Satze folgt, dass wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes gegeben sind, die übrigen drei Stücke desselben, nämlich die dritte Seite mit den ihr anliegenden Winkeln bestimmt werden können, weil (nach diesem §.) alle dreiseitigen Ecke, welche zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel einzeln gleich haben, auch die übrigen drei Stücke gleich haben müssen. —

Anmerk. 2. Haben zwei dreiseitige körperliche Ecke zwei Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel einzeln gleich, und folgen diese drei Stücke im einem Ecke in derselben Ordnung auf einander, als im andern, so kann man diese beiden Körperwinkel so in einander legen, dass sie sich decken, also kongruent sind. —

Anmerk. 3. In Anmerk. 1. wurde gezeigt, dass durch zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes, die drei übrigen Stücke des letzteren bestimmt werden können. Nun kann man aber durch die gegebenen drei Stücke, wenn man jedes derselben zu 2 R ergänzt, eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel des Supplementareckes bestimmen, und von diesem erhält man ferner die übrigen zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel, wenn man zu den drei gesuchten Stücken des ersten Eckes die Supplemente angibt; folglich kann man aus einer Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln des Supplementareckes die übrigen drei Stücke des letzteren bestimmen. Da man nun aus den Stücken eines jeden dreiseitigen Eckes die Stücke eines seiner Supplementarecke angeben kann, so folgt hieraus, dass, wenn eine Seite und die ihr anliegenden Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes bekannt sind, die übrigen drei Stücke des letzteren bestimmt werden können. —

Anmerk. 4. Da schon im vor. §. gezeigt wurde, dass man die einzelnen Bestimmungsstücke eines dreiseitigen körperlichen Eckes — nämlich seine Seiten und Winkel — mit denen eines sphärischen Dreieckes vertauschen kann, das auf einer Kugeloberfläche liegt, welche ihren Mittelpunkt im Scheitel des Eckes hat, und letzteres abschneidet; so werden auch diese zwei hier bewiesenen Sätze für das sphärische Dreieck gelten. Aus zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreieckes kann also seine dritte Seite und jeder der beiden übrigen Winkel, und aus einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln eines sphärischen Dreieckes kann jedes der drei übrigen Stücke desselben bestimmt werden. —

§. 154.

In §. 55. wurde gezeigt, dass die Summe der Winkel, welche ein körperliches vielseitiges Eck bilden, kleiner als vier Rechte sein muss. Nun macht die Summe aus den Winkeln des dreiseitigen körperlichen Eckes und den Seiten seines Supplementareckes gleich 3 mal 2 R, nämlich 6 R aus, und da die Summe der Seiten des Supplementareckes kleiner als vier Rechte sein muss, so muss die Summe der Winkel des dreiseitigen Eckes grösser als zwei Rechte sein. Grösser als 6 Rechte kann dieselbe aber in keinem Falle sein, weil sie zur Summe der Seiten des Supplementareckes addirt, sechs

Rechte ausmacht, folglich ist die Summe der Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes immer grösser als zwei und kleiner als sechs Rechte.

Anmerk. Hieraus folgt zugleich, dass in einem sphärischen Dreiecke die Summe der Seiten kleiner als vier Rechte, die Summe seiner Winkel aber grösser als zwei und kleiner als sechs Rechte sein muss. — Da die einzelnen Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes kleiner als zwei Rechte sein müssen, so ist auch hier nur von solchen sphärischen Dreiecken die Rede, von welchen jede Seite kleiner als zwei Rechte ist, und deshalb konnte auch die Anwendung dieses Paragraphs auf sphärische Dreiecke gemacht werden. —

§. 155.

Aufgabe 32. Es sind die drei Seiten eines körperlichen dreiseitigen Eckes gegeben; man soll

1. seine drei Winkel bestimmen;
2. seine Projektionen angeben.

Auflösung. (Fig. 114.) Es sei a die erste, b die zweite und c die dritte Seite des zu suchenden körperlichen Dreieckes, ferner sei $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$, und man soll die drei Winkel dieses dreiseitigen körperlichen Eckes bestimmen. Man nehme in der horizontalen Tafel und zwar in S den Scheitel dieses Eckes an, lege den Winkel a in die horizontale Tafel, mache also $< ASB = < a$. In S an SA lege man $< ASC_1 = < b$ und in S an SB lege man $< BSC_2 = < c$, welche man sich um SA und SB gedreht denken muss, bis die Geraden SC_1 und SC_2 zusammenfallen. Denken wir uns diese beiden Seiten um SA und SB so weit gedreht, bis die Geraden SC_1 und SC_2 in eine Gerade fallen, so beschreibt jeder Punkt SC_1 einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf SA_1 und jeder Punkt der Geraden SC_2 beschreibt einen Bogen, dessen Ebene senkrecht auf SB steht. Nehmen wir daher $SC_1 = SC_2$ an, so beschreiben die Punkte C_1 und C_2 beim Aufheben der Seiten b und c Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht auf SA und SB sind, und diese beiden Punkte C_1 und C_2 kommen in einen einzigen zu liegen, wenn die Drehung von b und c in ihre wahre Lage gemacht wurde. — Denkt man sich daher von diesem Punkte C_1 oder C_2 auf SA sowohl, als auch auf SB eine Ebene senkrecht gelegt, so wird die erste den Kreisbogen enthalten, welchen C_1 bei der Bewegung um SA und die zweite den Kreisbogen enthalten, welchen C_2 bei seiner Bewegung um SB beschreibt. Die Durchschnitte der von C_1 aus auf SA senkrecht gelegten Ebene mit den Ebenen ASB und ASC bilden aber (§. 50.) den Winkel der Seiten a und b, und liegen (nach §. 25.) in einer auf SA senkrechten Geraden CAC_1, wenn die Seite b in der Ebene von a liegt. Zieht man daher von C_1 aus auf SA die Gerade C_1A_1 senkrecht und verlängert dieselbe, so wird C_1A_1 der eine und A_1C der andere Schenkel des Winkels sein, welchen a und b unter sich machen. Da nun SA_1 in der horizontalen Tafel liegt, so steht auch die Ebene C_1A_1C senkrecht auf der horizontalen Tafel, und es wird mithin die horizontale Projektion des Punktes C_1 (§. 83.) auf A_1C fallen müssen. Wenn wir nun von C_2 aus auf SB die Gerade C_2B_1 senkrecht ziehen, und bis C verlängern, so wird aus gleichem Grunde die Ebene C_2B_1C den Winkel enthalten, welchen c mit a bildet, und zwar wird C_2B_1 der eine und B_1C der andere Schenkel dieses Winkels sein. Denkt man sich nun c sowohl, als auch a so weit um SB und SA gedreht, bis die Punkte C_1 und C_2 in einen zusammenfallen, so ist das verlangte körperliche Eck konstruirt, und in dieser Lage wird die horizontale Projektion von C_2 dieselbe, wie die von C_1 sein. Die von C_2 muss aber aus demselben Grunde in B_1C liegen, aus welchem die horizontale Projektion von C_1 in A_1C liegen muss, folglich fällt die horizontale Projektion dieses im Raume befindlichen Punktes C_1 oder C_2 in den Durchschnitt von C_2B_1 mit C_1A_1, also in C. Nun ist die horizontale Projektion von S dieser Punkt selbst; zieht man daher die Gerade SC_1 so wird ASC die horizontale Projektion von b und CSB die horizontale Projektion von c sein. —

Nun ist (§. 126.) der Winkel, welchen Ebene C_1SA mit der horizontalen Tafel bildet, in einem rechtwinkligen Dreiecke enthalten, dessen eine Kathete die horizontal-projicirende Linie von C_1, dessen andere Kathete die Entfernung der horizontalen Projektion dieses Punktes von SA, also CA_1 und dessen Hypothenuse C_1A_1 ist; zieht man daher von C aus auf CA_1 eine Senkrechte, und schneidet diese von A_1 aus mit der Länge von A_1C_1 ab, so erhält man (§. 126.) $< C'_1A_1C$, welchen die Seite b mit der Seite a macht, und $C_1C'_1$ muss die horizontal-projicirende Linie von C_1 sowohl, als auch die von C_2, und mithin (§. 63.) gleich der vertikalen Ordinate dieses Punktes sein. Zieht man also von C auf X die Gerade Cm senkrecht, und verlängert diese oberhalb X, macht $m'C = C'C_1$, so erhält man in $'C$ die vertikale Projektion des Punktes C_1 oder C_2. Da nun A, B und S in der horizontalen Tafel liegen, so wird die vertikale Projektion von A im Durchschnitte $'A$ der von A aus auf X senkrecht gezogenen $A'A$ mit X, die vertikale Projektion von S in $'S$, dem Durchschnitte der auf X gezogenen Senkrechten $S'S$ mit X und die vertikale Projektion von B im Durchschnitte $'B$ der von B auf X gezogenen

Senkrechten mit X (nach §. 63. und §. 70.) sein. Wenn man daher 'A 'S, 'S 'C und 'B 'S zieht, so erhält man die vertikale Projektion des körperlichen Eckes. Da $'C_1 C$ die horizontal-projicirende Linie von C_2 ist, so wird der Winkel, welchen c mit a bildet (nach §. 126.) erhalten, wenn man CC'_2 senkrecht auf $B_1 C_2$ zieht, und $CC'_2 = C'C_1$ macht, sodann $'C_2$ mit B_1 durch $B_1 'C_2$ verbindet, und es ist der Winkel $C B_1 'C_2$ also gleich dem Maasse des Winkels von c und a. — Nun ist noch der Winkel aufzusuchen, welchen b mit c macht. Um diesen zu erhalten, verfahren wir ganz nach §. 139., legen also b um S A und c um S B in die horizontale Tafel, machen $SC_1 = SC_2$, ziehen von C_2 auf $C_2 S$ die Gerade $C_2 E$ senkrecht, und von C_1 aus auf $C_1 S$ die Gerade $C_1 D$ senkrecht, ziehen DE, und konstruiren über DE das Dreieck DEF, in welchem $DF_1 = DC_1$, $EF = EC_2$ ist, so wird (§. 139.) $< DEE$ gleich dem sein, welchen Ebene $C_1 S A$ mit Ebene $C_2 S B$ macht. —

§. 156.

Aufgabe 33. Aus den drei Winkeln eines dreiseitigen körperlichen Eckes seine drei Seiten und die Projektionen desselben zu bestimmen.

Auflösung. In Anmerk. 2. des §. 152. wurde dargethan, dass man aus den drei Winkeln eines dreiseitigen körperlichen Eckes seine drei Seiten bestimmen kann, und zwar wurde dort gezeigt, dass man zur Bestimmung dieser Winkel ein Supplementardreieck des zu suchenden konstruiren muss. Wir werden also (nach §. 152.) auf folgende Weise verfahren:

1. Suchen wir zu jedem der drei gegebenen Winkel seinen Nebenwinkel, so erhalten wir die drei Seiten eines Supplementareckes von dem zu suchenden.
2. Aus diesen drei Nebenwinkeln als Seiten konstruiren wir dieses dreiseitige Supplementareck (nach §. 155.), indem wir seine drei Winkel und seine Projektionen bestimmen.
3. Nun ergänzen wir jeden der drei Winkel dieses Supplementareckes zu zwei Rechten, so erhalten wir die gesuchten drei Seiten des zu bestimmenden Eckes.
4. Aus diesen drei Seiten konstruiren wir nach §. 155. ein körperliches Eck, so müssen seine Winkel gleich den gegebenen sein. —

Anmerk. Auf gleiche Weise, wie in §. 155. aus den drei Seiten die drei Winkel und in diesem §. aus den drei Winkeln die drei Seiten eines dreiseitigen körperlichen Eckes gefunden wurden, kann man (§. 152. Anmerk. 4.) aus den drei Seiten eines sphärischen Dreieckes seine drei Winkel und aus den drei Winkeln eines sphärischen Dreieckes die drei Seiten dieses Dreieckes finden. —

§. 157.

Aufgabe 34. Zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes sind bekannt; man soll die dritte Seite und die beiden übrigen Winkel bestimmen. —

Auflösung. Da in (§. 153., Anmerk.) dargethan wurde, dass man aus zwei Seiten und dem von denselben eingeschlossenen Winkel ein körperliches Dreieck konstruiren kann, so wird auch die dritte Seite und jeder der beiden übrigen Winkel durch diese gegebenen drei Stücke bestimmt sein. Um nun aus den gegebenen drei Stücken die übrigen drei zu bestimmen, legen wir die eine der Seiten in die horizontale Tafel, und es sei daher (Fig. 114.) $<$ A S B die eine der gegebenen Seiten, an S A legen wir die andere derselben, welche $< C_1 S A$ sein soll. Ziehen wir nun von einem beliebigen Punkte aus auf die Communsektion S A dieser beiden Seiten eine Ebene senkrecht, so werden dieselben von dieser Ebene nach zwei Geraden geschnitten, die den Neigungswinkel beider Seiten bilden (§. 50.). Denken wir uns daher die Seite $C_1 S A$ um S A so weit aufgehoben, bis sie mit der Seite A S B den gegebenen Winkel bildet, nehmen auf SC_1 den Punkt C_1 beliebig an, und ziehen von diesem aus auf S A eine Ebene senkrecht, projiciren sodann C_1, so muss die horizontale Projektion dieses Punktes (nach §. 85.) in die horizontale Spur dieser Hülfsebene fallen, und es liegt mithin (§. 126.) der Neigungswinkel der Seiten $C_1 S A$ und A S B in einem rechtwinkligen Dreiecke, von welchem die horizontal-projicirende Linie des Punktes C_1 die eine, der zwischen der horizontalen Projektion dieses Punktes und der Geraden S A liegende Theil der horizontalen Spur der Hülfsebene die andere Kathete, die Hypothenuse aber der Durchschnitt der Seiten $C_1 S A$ mit der Hülfsebene ist, und diese Hypothenuse bildet mit der horizontalen Spur der Hülfsebene den angegebenen Winkel. Nun ist die von C_1 auf S A senkrecht gezogene Gerade $C_1 A_1$ der Durchschnitt der auf S A senkrecht gelegten Hülfsebene mit der Seite $C_1 S A$, und die von A_1 aus auf S A senkrecht gezogene $A_1 C_2$ gibt die horizontale Spur dieser Hülfsebene an; legen wir daher die Seite $C_1 S A$ wieder um S A in die horizontale Tafel, ziehen $C_1 A_1$ senkrecht auf S A, und legen in A_1 an $C_1 A_1$ den Winkel $C'_1 A_1 C$ der beiden angegebenen Seiten an, so können wir das vorhin erwähnte Dreieck

leicht konstruiren. Wir haben nämlich $A_1{}'C_1 = A_1C_1$ zu machen, $'C_1C$ senkrecht auf A_1C zu ziehen, so ist $\triangle\ 'C_1CA_1$ das erwähnte, in welchem $C_1'C$ gleich der horizontal-projicirenden Linie des Punktes C_1 und C die horizontale Projektion dieses Punktes ist. Ziehen wir nun SC, so ist diese Gerade die horizontale Projektion der Communsektion von der Seite ASC_1 und der dritten gesuchten Seite, und mithin ASC die horizontale Projektion von C_1SA und CSB die horizontale Projektion der gesuchten Seite. Um nun diese selbst anzugeben, verfahren wir ebenso, als wenn wir den Neigungswinkel derselben und der Seite ASB finden wollten, denken uns daher von C aus auf SB eine Ebene senkrecht gezogen, und bezeichnen die Durchschnitte derselben mit diesen Seiten. Die von C aus auf SB gezogene Senkrechte CB_1 ist der Durchschnitt dieser Hülfsebene mit ASB, und die von B_1 aus auf SB gezogene Senkrechte B_1C_2 wird der Durchschnitt jener Ebene mit der gesuchten Seite sein, wenn letztere in der horizontalen Tafel liegend angenommen wird. Da aber der eine Schenkel dieser Seite SB_1, der andere aber mit SC_1 einerlei ist, wenn das körperliche Eck konstruirt gedacht wird, so wird die gesuchte Seite erhalten, wenn man aus S mit SC_1 einen Bogen beschreibt, und mit diesem die Gerade B_1C_2 abschneidet. Von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte C_2 aus ziehen wir nach S die Gerade C_2S, so wird $< C_2SB$ gleich der gesuchten dritten Seite des körperlichen dreiseitigen Eckes sein. Von C auf B_1C die Gerade CC'_2 senkrecht gezogen und gleich CC'_1 gemacht, sodann C'_2B gezogen gibt den Winkel $CB_1C'_2$, welcher der gesuchte Neigungswinkel der Seiten ASB und BSC_2 ist. Der dritte Winkel so wie die vertikale Projektion dieses dreiseitigen körperlichen Eckes können nach vor. §. bestimmt werden. —

§. 158.

Aufgabe 55. Es ist eine Seite mit den ihr anliegenden Winkeln eines körperlichen dreiseitigen Eckes gegeben; man soll die übrigen drei Stücke desselben bestimmen.

Auflösung. Nach §. 153. Anmerk. ist durch eine Seite mit den ihr anliegenden Winkeln eines dreiseitigen körperlichen Eckes, letzteres sowohl als jedes seiner übrigen drei Stücke völlig bestimmt. Wir werden daher vor Allem die gegebene Seite sowohl, als auch jeden der ihr anliegenden Winkel zu zwei Rechten ergänzen, aus diesen Supplementswinkeln ein körperliches Dreieck konstruiren, von welchem die Ergänzungswinkel der gegebenen Winkel des zu suchenden Eckes Seiten sind und der Ergänzungswinkel der angegebenen Seite der eingeschlossene Winkel ist, so wird dieses dreiseitige Eck ein Supplementareck des gegebenen sein; und seine übrigen drei Stücke werden nach vor. §. gefunden werden können. Bestimmt man nun die dritte Seite dieses Eckes, und ergänzt sie zu zwei Rechten, so ist der hierdurch erhaltene Ergänzungswinkel gleich dem dritten Winkel des gesuchten Eckes. Bestimmt man ferner von diesem Supplementarecke die beiden übrigen Winkel, und ergänzt jeden derselben zu 2 R, so werden diese Ergänzungswinkel gleich den beiden gesuchten Seiten des zu bestimmenden körperlichen Eckes sein (§. 151.), und letzteres kann mithin konstruirt werden, weil zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel nunmehr bekannt sind. —

Anmerk. Ebenso, wie in §. 157. aus zwei Seiten und dem von diesen eingeschlossenen Winkel und in §. 158. aus zwei Winkeln und der diesen anliegenden Seite die übrigen Stücke des dreiseitigen körperlichen Eckes gefunden wurden, so kann man auch aus zwei Seiten und dem zwischen diesen liegenden Winkel eines sphärischen Dreieckes, oder aus einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln eines solchen Dreieckes, seine übrigen drei Stücke bestimmen. —

§. 159.

Aufgabe 56. Aus zwei Seiten und dem Winkel, der einer dieser Seiten gegenüber liegt, ein dreiseitiges körperliches Eck und die übrigen Stücke desselben zu konstruiren.

Auflösung. (Fig. 115.) Es sei ASB die eine der gegebenen Seiten, ASC sei die andere, welche um AS gedreht und mit der Seite ASB in die horizontale Tafel gelegt wurde. Um nun die Aufgabe zu lösen, verfahren wir ebenso, als wollten wir den Winkel, welchen die Seite BSA mit der dritten gesuchten und sodann den Winkel suchen, den die Seite ASC_1 mit der Seite BSA macht. Zur Bestimmung des ersteren müssen wir (nach §. 155.) auf die Kante SB eine Ebene senkrecht legen, so wird der Durchschnitt dieser Ebene und der gesuchten mit dem Durchschnitte der Hülfsebene und der Seite BSA den Winkel bilden, welchen BSA mit der gesuchten Seite bildet, und der hier angegeben ist. Legen wir daher von B aus eine Ebene senkrecht auf SB, so wird der Durchschnitt BD der eine Schenkel des gegebenen Winkels sein, wenn wir daher in B an BD diesen Winkel anlegen, so dass $< DBF$ gleich diesem Winkel wird, so wird BF der Durchschnitt dieser Hülfsebene mit der dritten Seite sein. Heben wir daher ADC_1 um AS auf, so muss diese Drehung so weit geschehen, bis die Ebene SBF

von SC_1 getroffen wird. Nun wollen wir zur Aufsuchung des Winkels übergehen, welchen die Seite ASC_1 mit der Seite ASB bildet. Wir legen daher (§. 155.) von D aus auf AS eine Ebene senkrecht, so werden die Durchschnitte derselben mit ASC und ASB, nämlich DC und DE den verlangten Winkel bilden. In dieser Hülfsebene C_1DE bleibt aber der Punkt C_1 stets liegen; folglich wird C_1 in den Durchschnitt der Ebene SBF mit der Ebene C_1DE zu liegen kommen. Von diesem Durchschnitte ist nun E ein Punkt, weil SBE in der einen und C_1DE in der andern Ebene liegt, ferner haben die drei Ebenen SBF, C_1DE und BDF den Punkt F, der im Durchschnitte von DF und BF ist gemeinschaftlich; legen wir daher die Communsektion von Ebene C_1DE mit Ebene BDF um C_1E in die horizontale Tafel, so erhalten wir in A diesen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der dritten Seite mit den beiden Hülfsebenen. Ziehen wir daher von A nach E die Gerade AE, so erhalten wir die Gerade, in welche nach der Aufhebung der Seite ASC_1 der Punkt C_1 zu liegen kommen muss. Von D aus ziehen wir daher mit DC_1 einen Kreisbogen, so wird von diesem die Gerade AE in dem Punkte H getroffen, und es muss in der Entfernung HE von SB der Punkt C_1 nach der Aufhebung der Seite ASC_1 zu liegen kommen. Denken wir uns nun die gesuchte Seite um SE gedreht, und links von ASB in die horizontale Tafel gelegt, ferner mit SC_1 von S aus und mit EH von E aus Kreisbögen beschrieben, so wird im Durchschnitte dieser Bögen nämlich in C_2 ein Punkt erhalten, welcher dem zweiten Schenkel der dritten Seite angehört, und mit C_1 in einen Punkt zusammenfällt, sobald das dreiseitige Eck wirklich konstruirt ist. Zieht man daher SC_2, so erhält man die gesuchte Seite C_2SE, welche mit der Seite ASB den gegebenen Winkel bildet. — Die übrigen Stücke, so wie die Projektionen dieses Eckes können nun nach §. 155. bestimmt werden. —

Anmerk. Hier trifft der Kreisbogen C_1H die Gerade EA nach in H, folglich wird C_3 ein Punkt der dritten Seite und C_3SE diese selbst sein, wenn H der Durchschnittspunkt ist. In diesem Falle finden also zwei Auflösungen statt, und man findet zwei körperliche dreiseitige Ecke, welche die zwei gegebenen Seiten mit dem Winkel, der einer dieser Seiten gegenüber steht, enthalten. — Wird der von D aus mit DC_1 beschriebene Bogen von AE nur berührt, so erhalten wir bloss ein körperliches dreiseitiges Eck, und die Aufgabe ist dann eine ganz bestimmte. In dem Falle aber, in welchem EA von dem aus D mit DC_1 beschriebenen Kreisbogen gar nicht getroffen wird, ist die Auflösung unmöglich. —

§. 160.

Aufgabe 37. Aus zwei Winkeln und einer Seite, welche einem dieser Winkel gegenüber steht, ein körperliches dreiseitiges Eck und die übrigen drei Stücke desselben zu konstruiren.

Auflösung. Man ergänze jedes dieser drei gegebenen Stücke zu 180°, so erhält man (§. 151.) zwei Seiten und einen Gegenwinkel des Supplementareckes. Aus diesen drei Ergänzungswinkeln (nach vor. §.) das Ergänzungseck und seine übrigen dreiStücke konstruirt, sodann jeden dieser ietzteren zu 180° ergänzt, so erhält man die beiden übrigen Seiten und den dritten Winkel des gesuchten Eckes, welches also leicht konstruirt werden kann. —

Anmerk. Auf dieselbe Weise, wie in diesem und dem vor. Paragraphe angegeben wurde, wird man verfahren, wenn man aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel oder aus zwei Winkeln und einer Gegenseite eines sphärischen Dreieckes seine übrigen drei Stücke konstruiren wollte. —

Fünftes Kapitel.

Von den Polyedern, ihrer Erzeugung, ihren Durchschnitten mit Ebenen und ihren Durchdringungen unter sich.

§. 161.

Ein körperlicher Raum wird von wenigstens vier Ebenen begränzt, und ein solcher Körper — der einfachste — ist das Tetraeder. Wird ein Körper von mehr als vier Seiten begränzt, so wird er ein Polyeder genannt, wenn man nicht auf die Anzahl seiner Seitenebenen Rücksicht nehmen will. —

§. 162.

Unter den eckigen Körpern sollen folgende besonders betrachtet werden:

1. das Prisma,
2. die Pyramide und
3. die regelmässigen Körper. —

Begränztes Prisma wird ein Körper genannt, welcher von Parallelogrammen umgränzt wird, die durch zwei parallele Ebenen abgeschnitten sind. — Nimmt man daher eine beliebige drei- oder mehrseitige ebene Figur an, zieht von einem Scheitel derselben aus eine Gerade, die gegen die Ebene

der Figur beliebig geneigt ist, und lässt diese Gerade parallel zu ihrer ersten Richtung an dem Perimeter der gegebenen Figur fortbewegen, so erhält man ein Prisma. Man nennt diese Gerade die Erzeugende oder Generatrix des Prisma, die angegebene Figur, deren Umfang von der Generatrix stets getroffen werden muss, die Direktrix desselben.

§. 163.

Betrachtet man einen beliebigen Punkt der Generatrix, so bleibt derselbe während der Bewegung der Generatrix stets in gleicher Entfernung von der Direktrix, weil jene gegen diese dieselbe Neigung behält, mithin bleibt der betrachtete Punkt der Generatrix in einer Ebene, die parallel zur Direktrix ist. Legt man daher durch einen beliebigen Punkt der Generatrix eine Ebene parallel zur Direktrix, so schneidet diese Ebene das Prisma nach einer Figur, deren Perimeter der Ort ist, auf welchem der angenommene Punkt während der Bewegung der Generatrix bleibt.

Nun beschreibt die Generatrix (nach §. 5.) so viele Ebenen, als wie viele Seiten die Direktrix hat, und da jeder Punkt der Generatrix in einer zur Direktrix parallelen Ebene bleibt, so schneidet jede Ebene, in welcher ein Punkt der Generatrix während der Bewegung der letzteren bleibt (§. 33.) die Seitenebenen des Prisma nach Geraden, die parallel zu den Seiten der Direktrix sind. Die Generatrix bleibt aber bei der Erzeugung des Prisma stets parallel zu ihrer ersten Richtung, folglich sind die Figuren, welche in den einzelnen Seitenebenen entstehen, wenn man parallel zur Direktrix eine Ebene legt, Parallelogramme, und die Seiten der Figur, welche den Durchschnitt dieser mit der Direktrix parallelen Ebene mit dem Prisma bildet, sind einzeln gleich den Seiten der Direktrix. Da aber die Seiten der Figur, welche entsteht, wenn man parallel zur Direktrix eine Ebene legt, auch einzeln parallel zu den Seiten der Direktrix sein müssen, so sind (§. 36.) auch die Winkel jener Figur einzeln gleich den Winkeln der Direktrix.

Hieraus folgt also der Satz:
Legt man in einem unbegränzten Prisma eine Ebene parallel zur Direktrix, so wird dasselbe nach einer Figur abgeschnitten, deren Seiten und Winkel einzeln gleich den Seiten und Winkeln der Direktrix sind, die also auch völlig gleich der Direktrix ist.

Anmerk. 1. Schneidet man die Seitenebenen des Prisma durch eine beliebige Ebene ab, schneidet von einem Scheitel der erhaltenen Durchschnittsfigur aus auf der Generatrix ein bestimmtes Stück ab, und zieht durch den Endpunkt der Generatrix eine Ebene parallel zur ersteren, so schneidet letztere das Prisma nach einer Figur, die gleich und kopgruent mit der Durchschnittsfigur der ersten Ebene sein muss. Denkt man sich das Prisma nicht über diese beiden Durchschnittsebenen hinaus verlängert, so nennt man die beiden Durchschnittsfiguren die Grundflächen des zwischen denselben enthaltenen Theiles vom Prisma, und die unter sich gleichen Theile der Generatrix, welche zwischen den Grundflächen liegen, nennt man die Kanten des Prisma. —

Anmerk. 2. Steht die Generatrix senkrecht auf einer Grundfläche des Prisma, so steht sie auch senkrecht auf seiner andern Grundfläche (§. 34.) und das Prisma wird in diesem Falle ein senkrechtes genannt, in jedem anderen Falle ein schiefes. Nach der Anzahl der Seiten, welche die Direktrix hat, unterscheidet man dreiseitige, vierseitige etc. etc. Prismen. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, wird ein Parallelepipedum genannt; sind diese Grundflächen Rechtecke und das Prisma ein senkrechtes, so nennt man das Parallelepipedum ein rechteckiges. Sind die Grundflächen eines schiefen Parallelepipedums Rhomben, deren Seiten gleich den einzelnen Kanten des Prisma sind, so nennt man dieses Prisma ein Rhomboeder. Sind die Grundflächen eines rechteckigen Parallelepipedums Quadrate, und ist jede Kante so gross, als eine Seite eines solchen Quadrates, so wird dieses Parallelepipedum ein Cubus oder Würfel, auch Hexaeder, regelmässiges Prisma genannt. —

§. 164.

Aus dem vorigen Paragraphe ist also zur Genüge zu ersehen, dass

1. ein Prisma dadurch erzeugt werden kann, indem sich eine Gerade parallel zu ihrer ersten Richtung an dem Perimeter eines Polygones fortbewegt.
2. Die Durchschnittsfiguren von zwei parallelen, also auch von mehreren unter sich parallelen Ebenen völlig gleich sind.

Wir können nun sogleich eine zweite Erzeugungsart des Prisma folgen lassen, die auf diesen letzten Satz beruht. Nimmt man nämlich eine fix bleibende Gerade als Direktrix an, und lässt an dieser eine ebene geradlinige Figur parallel zu ihrer ersten Richtung als Generatrix fortbewegen, so entsteht ein Körper, von welchem man zeigen kann, dass derselbe ein Prisma ist. Denn die Generatrix bleibt stets parallel zu ihrer ersten Richtung, und mithin behält jeder Punkt ihres Perimeters gleiche Entfernung von der Direktrix: es beschreibt daher jeder Punkt der Generatrix eine Gerade, die parallel zur Direktrix ist. Betrachtet

man daher einen Theil des beschriebenen Körpers, welcher zwischen der ersten und einer beliebigen Lage der Generatrix liegt, so wird die Begränzungsfläche desselben aus so vielen Ebenen zusammengesetzt sein, als wie viele Seiten die Generatrix hat (weil nach §. 5. jede Seite der Generatrix eine Ebene beschreibt), und zwar werden die Theile dieser Ebenen, die zwischen den zwei betrachteten Lagen der Generatrix enthalten sind, Parallelogramme sein (weil jede Seite der Generatrix dieselbe Länge beibehält und parallel zu sich selbst bleibt); folglich ist der hierdurch beschriebene Körper ein Prisma. Die Entfernung dieser beiden Lagen der Generatrix, oder überhaupt die Entfernung der Grundflächen eines Prisma wird Höhe desselben genannt. Bei einem senkrechten Prisma gibt jede Kante die Höhe desselben an.

§. 165.

Aus §. 163. und §. 164 kann man ein Mittel ableiten, um ein Prisma projiciren zu können. Benützt man die erste Erzeugungsart, so hat man auf folgende Weise zu verfahren:

1. Hat man die Projektionen seiner Direktrix anzunehmen;
2. Nehme man die Projektionen der Richtung seiner Generatrix an.
3. Ziehe man durch die einzelnen Scheitel der Direktrix Parallele mit der Richtung der Generatrix, und durch je zwei auf einander folgende Lagen der Generatrix eine Ebene gelegt, so erhält man die Seitenflächen des Prisma.

(Fig. 116.) Ist A B C D die horizontale und 'A 'B 'C D' die vertikale Projektion eines Parallelogrammes, welches Direkirix eines Prisma sein soll, von welchem G, G' die Projektionen der Richtung der Generatrix sind; so ziehe man A a ≠ B b ≠ C c ≠ D d ≠ G, ferner 'A 'a ≠ 'B 'b ≠ 'C 'c ≠ 'D 'd ≠ 'G, so werden die diesen Projektionen entsprechenden Geraden im Raume (§. 76.) unter sich parallel sein, und die auf einander folgenden Lagen der Erzeugenden des Prisma sein, mithin stellt A B C D a b c d die horizontale und 'A 'B 'C 'D 'd b' a' c' die vertikale Projektion des Prisma dar, dessen zweit-vertikale Projektion leicht bestimmt werden könnte.

Nimmt man die zweite Erzeugungsart zu Hülfe, so projicire man die Generatrix sowohl, als auch die Richtung der Direktrix, ziehe durch die einzelnen Scheitel der ersteren parallele Linien zur Direktrix, so erhält man die einzelnen Kanten des Prisma, durch welche man sich das Prisma vorstellen kann, wenn man durch je zwei aufeinander folgende Kanten eine Ebene gelegt denkt.

§. 166.

Aufgabe 38. Es ist die horizontale Projektion eines auf einem Prisma liegenden Punktes gegeben; man soll seine vertikale Projektion bestimmen.

Auflösung. Da sich der zu bestimmende Punkt auf dem Prisma befinden soll, so wird die Generatrix desselben auch einmal durch diesen Punkt gehen. Denkt man sich daher durch den anzugebenden Punkt eine Parallele zur Richtung der Generatrix (§. 76.) gezogen, so wird diese Parallele jene Lage der Generatrix sein, in welcher dieselbe durch den Punkt geht, dessen horizontale Projektion gegeben ist. Da aber (§. 76.) parallele Gerade auch parallele Projektionen haben, und (§. 72.) die Projektionen eines auf einer Geraden liegenden Punktes in den Projektionen der Geraden liegen müssen; so wird die Gerade, welche man durch die horizontale Projektion des gegebenen Punktes zieht, die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix sein, welche durch den anzugebenden Punkt geht. Zur horizontalen Projektion dieser Lage der Generatrix kann man aber ihre vertikale Projektion bestimmen, wenn man zur horizontalen Projektion des Punktes, in welchem diese Lage der Generatrix die Direktrix trifft die vertikale Projektion (§. 73.) bestimmt, und durch letztere eine Gerade parallel zur vertikalen Projektion der Richtung der Generatrix zieht. Zieht man daher von der gegebenen horizontalen Projektion des zu suchenden Punktes aus eine Senkrechte auf die Axe X, so wird der Punkt, in welchem diese Senkrechte von der vertikalen Projektion jener aufgesuchten Lage der Generatrix getroffen wird (§. 73.) die vertikale Projektion des Punktes sein, dessen horizontale Projektion gegeben ist, und der sich auf der Oberfläche des gegebenen Prisma befindet.

(Fig. 116.) Es sei m die horizontale Projektion eines auf dem gegebenen Prisma liegenden Punktes; man soll seine vertikale Projektion bestimmen. Man ziehe m n ≠ G, so ist m n die horizontale Projektion derjenigen Lage der Generatrix, welche durch den angegebenen Punkt geht, und n ist die horizontale Projektion des Punktes, in welchem letztere die Direktrix trifft. Nach §. 72. muss aber die zu n gehörende vertikale Projektion in 'C 'D und nach §. 63. muss dieselbe in der von n auf X senkrecht gezogenen Geraden sein; zieht man daher n 'n senkrecht auf X, so wird im Durchschnittspunkte von n 'n mit 'C 'D, nämlich in n' die

vertikale Projektion des Punktes sein, in welchem die durch den anzugebenden Punkt gehende Lage der Generatrix die Direktrix trifft. Zieht man nun 'n 'm ≠ 'G, so wird 'n m' die vertikale Projektion dieser Lage der Generatrix sein, in welcher sich die vertikale Projektion des Punktes befindet, dessen horizontale Projektion m ist. Von m aus auf X die Senkrechte m m' gezogen, gibt im Durchschnitte mit n' m', nämlich in m' (§. 73.) die vertikale Projektion des zu suchenden Punktes an.

§. 167.

Aufgabe 39. Diejenigen Figuren zu bestimmen, nach welchen ein Prisma jede der Projektionstafeln trifft, oder die Spuren eines Prisma anzugeben.

Auflösung. Denkt man sich die Oberfläche des Prisma so weit ausgedehnt, bis sie die horizontale Tafel sowohl, als auch die vertikale Tafel trifft, so erhält man die Spuren des Prisma. Bei der Verlängerung dieser Oberfläche wird nun nicht allein von jeder Ebene derselben, sondern auch von jeder Lage der Generatrix des Prisma die Spur gesucht; daher haben wir zwei Mittel, um die Spuren eines Prisma zu bestimmen, wir können nämlich entweder

1. durch die einzelnen Scheitel der Direktrix Parallele mit der Richtung der Generatrix gezogen denken, durch je zwei auf einander folgende Lagen dieser Parallelen (§. 103.) eine Ebene legen und von diesen Ebenen die Spuren bestimmen, so werden die vertikalen Spuren dieser Seitenebenen des Prisma eine Figur bilden, welche die vertikale Spur des Prisma ist, und ebenso werden die horizontalen Spuren dieser Seitenebenen eine Figur einschliessen, welche die horizontale Spur des Prisma ist. Oder wir können
2. von den durch die einzelnen Scheitel der Direktrix gezogenen Parallelen ihre Spuren bestimmen, die vertikalen Spuren derselben unter sich und ebenso die horizontalen Spuren in derselben Ordnung durch Gerade verbinden, in welcher die Scheitel der Direktrix auf einander folgen, so erhält man (§. 73.) die beiden Spuren des angegebenen Prisma.

(Fig. 116.) Es sei A B C D b die horizontale und 'A 'B 'C 'D 'b die vertikale Projektion eines Prisma, man soll seine Spuren bestimmen. Man suche (nach §. 93.) die Spuren h_1 und v_1 der Geraden A a, 'A 'a, ebenso die horizontale Spur h_2 und die vertikale v_2 der Geraden B b, 'B 'b, sodann die horizontale Spur h_3 und die vertikale v_3 von C c, 'C 'c und endlich die horizontale Spur h_4 und die vertikale v_4 der Geraden D d, 'D 'd, ziehe die Geraden $h_1 h_2$, $h_2 h_3$, $h_3 h_4$ und $h_4 h_1$, sodann $v_1 v_2$, $v_2 v_3$, $v_3 v_4$ und $v_4 v_1$, so erhält man die horizontale Spur $h_1 h_2 h_3 h_4$ und die vertikale Spur $v_1 v_2 v_3 v_4$ des angegebenen Prisma.

§. 168.

Aufgabe 40. Es ist die horizontale Spur eines Prisma angegeben, ferner die Richtung seiner Generatrix durch ihre Projektionen und die Spuren einer Ebene; man soll

1. **das Prisma projiciren.**
2. **den Durchschnitt desselben mit jener Ebene angeben.**

Auflösung. Um 1. die Projektionen des Prisma anzugeben, ziehe man durch die Scheitel der gegebenen horizontalen Spur parallele Gerade mit mit der horizontalen Projektion der Richtung der Generatrix, so erhält man die horizontale Projektion des Prisma (§. 165.), weil man die horizontale Spur des Prisma als Direktrix desselben betrachten kann. Da nun die vertikale Projektion dieser Spur in der Axe liegen muss (§. 70.), so werden die vertikalen Projektionen ihrer einzelnen Scheitel (§. 70.) in den Durchschnitten der von denselben auf X gezogenen Senkrechten mit X sein. Durch die vertikale Projektion dieser einzelnen Scheitel der horizontalen Spur des Prisma parallele Gerade zur vertikalen Projektion der Generatrix gezogen, gibt (§. 165.) auch die vertikale Projektion des Prisma.

Nun soll 2. die Durchschnittsfigur des Prisma mit der gegebenen Ebene bestimmt werden. Denkt man sich die Oberfläche des Prisma bis zum Durchschnitte mit der gegebenen Ebene verlängert, so wird auch jede Lage der Generatrix desselben hierdurch bis zu jener Ebene ausgedehnt, und mithin auch jene Lagen derselben, die durch die einzelnen Scheitel der horizontalen Spur des Prisma gehen. Es enthält also die Durchschnittslinie der Oberfläche des Prisma mit der gegebenen Ebene die einzelnen Durchgangspunkte seiner Kanten mit jener Ebene. Bestimmt man daher (§. 114.) den Durchgangspunkt einer jeden Kante des Prisma mit der gegebenen Ebene, verbindet diese einzelnen Punkte in derselben Ordnung durch Gerade, in welcher die Scheitel der Direktrix (hier der horizontalen Spur) auf einander folgen; so erhält man die Projektionen der gesuchten Durchschnittsfigur. —

Die wahre Grösse dieser Durchschnittsfigur erhält man dadurch, dass man die gegebene Ebene um eine ihrer Spuren dreht, und in die mit dieser

Spur gleichnamige Tafel legt, sodann (nach §. 130.) jeden Scheitel der Durchschnittsfigur in der umgelegten Ebene bestimmt, und diese erhaltenen Punkte in derselben Ordnung durch Gerade verbindet, in welcher die einzelnen Scheitel selbst aufeinander folgen.

Anmerk. Man kann die Grösse dieser Durchschnittsfigur auch dadurch angeben, dass man die Durchschnittsebene so weit dreht, bis sie parallel mit einer der Tafeln ist, z. B. parallel zur horizontalen Tafel, sodann die neue horizontale Projektion der Durchschnittsfigur bestimmt, so wird diese auch gleich ihrer wahren Grösse sein. —

§. 169.

Beispiel 1. (Fig. 117.) Das regelmässige Sechseck ABCDE sei die horizontale Spur eines sechsrechten Prisma, man soll die Projektionen dieses Prisma und die Durchschnittsfigur der Ebene HSV mit demselben angeben, wenn letztere senkauf der vertikalen Tafel steht.

Da dieses Prisma senkrecht auf seiner horizontalen Spur ist, so ist dasselbe auch senkrecht auf der horizontalen Tafel, und es steht mithin die Richtung seiner Erzeugenden senkrecht auf dieser Projektionstafel. Da nun die Punkte A, B, C, D, E die horizontalen Spuren der einzelnen Kanten des Prisma sind, so werden diese zugleich ihre horizontalen Projektionen sein, und ihre vertikalen Projektionen müssen (§. 75.) senkrecht auf X sein. Bestimmt man daher (§. 70.) die vertikalen Projektionen 'A, 'B, 'C, 'D, 'E der Scheitel des gegebenen Sechseckes, zieht sodann die Geraden 'AM, 'BN, 'EP, 'CQ senkrecht auf X, so erhält man die vertikale Projektion des Prisma, dessen horizontale Projektion mit seiner horizontalen Spur zusammenfällt, also ABCDE ist. Soll nun der Durchschnitt dieses Prisma mit der Ebene HSV angegeben werden, und steht letztere senkrecht auf der vertikalen Tafel, so hat man nur noch die wahre Grösse dieses Durchschnittes zu bestimmen; denn diese Durchschnittsebene ist, weil sie senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, zugleich vertikal-projicirende Ebene der Durchschnittsfigur (§. 83., Anmerk.), weshalb also 'a'b'c'c die vertikale Projektion der letzteren ist. Nun muss ferner die horizontale Projektion eines jeden Scheitels dieser Figur (§. 72.) in der horizontalen Projektion einer Kante des Prisma sein; und da die horizontalen Projektionen aller Kanten in ABCDE sind, so wird auch die horizontale Projektion der Durchschnittsfigur mit ABCDE zusammenfallen; folglich ist ABCDE die horizontale und 'a'b'c'e die vertikale Projektion der gesuchten Durchschnittsfigur. — Um die wahre Grösse dieser letzteren anzugeben, wollen wir die Ebene HSV um V drehen und in die vertikale Tafel legen, sodann (§. 130.) den wahren Ort eines jeden Scheitels der Figur angeben. Ziehen wir daher die Geraden 'aA$_1$, 'bB$_1$, 'cC$_1$, 'bE$_1$ senkrecht auf 'V, machen 'aA$_1$ = 'AA, 'aF$_1$ = 'AF, 'bB$_1$ = 'BB, 'bE$_1$ = B'E, 'cC$_1$ = 'CC und 'cD$_1$ = 'CD, zieht A$_1$B$_1$, B$_1$C$_1$, C$_1$D$_1$, D$_1$E$_1$ und E$_1$F$_1$, so erhalten wir die Figur A$_1$B$_1$C$_1$D$_1$E$_1$F$_1$, welche die wahre Grösse der Durchschnittsfigur angibt. —

Anmerk. Die Grösse dieser Durchschnittsfigur ist auch durch a$_1$b$_1$c$_1$d$_1$e$_1$f$_1$ bestimmt, und es wird letztere gefunden, wenn man die Ebene HSV um die auf der vertikalen Tafel senkrecht stehende Gerade B'B, 'b dreht, bis sie parallel mit der horizontalen Tafel ist.

Beispiel 2. (Fig 118.) Es sei ABCDE die horizontale Spur eines Prisma, G, 'G seien die Projektionen seiner Generatrix, ferner HSV eine beliebige Ebene; man soll die Projektionen des Prisma und seine Durchschnittsfigur mit der gegebenen Ebene bestimmen. Nach (§. 70.) ist die vertikale Projektion eines jeden in der horizontalen Tafel liegenden Punktes in der Axe X, folglich ist 'A'B'C'D'E die vertikale Projektion von ABCDE, und ist leicht zu bestimmen. Da nun die einzelnen Kanten des Prisma durch die Punkte A, B, C, D, E gehen, so werden die vertikalen Projektionen dieser Kanten durch die Punkte 'A, 'B, 'C, 'D, 'E und ihre horizontalen Projektionen durch die Punkte A, B, C, D, E gehen müssen. Da aber diese einzelnen Kanten parallel mit der gegebenen Richtung der Erzeugenden, also ihre vertikalen Projektionen parallel 'G und ihre horizontalen Projektionen parallel mit G sein müssen, so erhält man die horizontale Projektion dieses Prisma, wenn man die Geraden Af, Bg, Ch, Dk, El parallel mit G zieht; die vertikale Projektion desselben wird erhalten, wenn man 'Af$_1$, 'Bg$_1$, 'Ch$_1$, 'Dk$_1$, 'El$_1$ parallel mit 'G zieht. Sucht man nun von diesen einzelnen Kanten (nach §. 114.) die Durchgangspunkte mit der Ebene HSV, und verbindet diese in gehöriger Ordnung durch Gerade, so erhält man die horizontale Projektion abcde und die vertikale Projektion 'a'b'c'd'e der Figur, nach welcher das angegebene Prisma von der Ebene HSV geschnitten wird. — Nun lege man diese Ebene, indem man dieselbe um V dreht, in die vertikale Tafel, ziehe 'am senkrecht auf V, ziehe 'aA$_1$ senkrecht auf 'am, und mache 'aA$_1$ = as, verbinde m mit A, durch mA$_1$, und mache mA$_2$ = mA$_1$, so erhält man (§. 130.) in A$_1$ den Ort a'a in der umgelegten Ebene. Auf gleiche Weise kann man die Punkte b'b, c'c etc. etc. in der umgelegten Ebene finden, die in B$_2$, C$_2$, D$_2$ und E$_2$ sein werden.

Verbindet man diese Punkte der Ordnung nach durch Gerade, so erhält man die Figur $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2$, welche die Grösse derjenigen angibt, nach welcher das angegebene Prisma von der Ebene H S V geschnitten wird. —

Beispiel 3. (Fig. 119.) Es sei die Direktrix eines Prisma durch ihre Projektionen (A B C und 'A'B'C) gegeben, ferner seien G, 'G die Projektionen der Richtung der Generatrix desselben, man soll parallel mit der Direktrix in einer bestimmten Entfernung das Prisma durch eine Ebene abschneiden, die Projektionen der Durchschnittsfigur bestimmen, und die Grösse der letzteren angeben. Vor Allem ziehe man durch die einzelnen Scheitel der Direktrix, nämlich durch A'A, B'B, C'C parallele Gerade zur Generatrix, ziehe also ihre horizontalen Projektionen parallel zur horizontalen Projektion der Generatrix und ihre vertikalen Projektionen parallel zur vertikalen Projektion der Generatrix, so erhält man die Projektionen der Kanten des Prisma und kann daher letzteres sich leicht vorstellen. Nun suche man die Ebene, in welcher die Direktrix liegt, lege also durch die drei Punkte A'A, B'B und C'C eine Ebene H N V (§. 105.), und ziehe durch den Endpunkt einer Kante die Ebene E S'E parallel zu H N V, suche nach vor. §. den Durchschnitt von E S'E mit dem gegebenen Prisma, so wird derselbe parallel, und mithin (§. 163.) auch gleich der gegebenen Direktrix (A B C, 'A'B'C) sein. Von diesem Schnitte könnte man die wahre Grösse ebenso finden, wie diess in den vorigen Beispielen von den Durchschnittsfiguren geschehen ist; allein da man aus §. 163. weis, dass derselbe gleich der gegebenen Direktrix ist, so ist das Aufsuchen desselben unnöthig. —

Anmerk. Da bei diesen Construktionen auf die Anzahl der Scheitel der Direktrix nicht Rücksicht genommen wurde, so gelten dieselben für ein Prisma, das irgend ein Polygon zur Direktrix hat. —

§. 170.

Aufgabe 41. Es ist ein Prisma durch seine Direktrix und die Projektionen seiner Generatrix gegeben; man soll den Durchschnitt desselben mit einer Ebene angeben, welche parallel zur Erzeugenden ist.

Auflösung. Vor Allem haben wir zu untersuchen, was für eine geometrische Grösse dieser gesuchte Durchschnitt ist. Ist die Durchschnittsebene nicht parallel mit der Erzeugenden, so ist sie auch nicht parallel mit einer der Kanten des Prisma, und wird mithin von jeder der Kanten auch getroffen, so dass also die Durchschnittsfigur in diesem Falle ebenso viele Seiten hat, als wie viele Kanten das Prisma, oder als wie viele Seiten seine Direktrix hat. In unserem vorliegenden Falle kann aber keine der Kanten die Durchschnittsebene treffen, sondern es müssen entweder die einzelnen Kanten mit dieser Ebene parallel oder einzelne derselben in ihr selbst enthalten sein. Nun schneidet unsere Durchschnittsebene zwei Seitenebenen des Prisma (§. 13.) nach Geraden, und da diese Ebene parallel zu den einzelnen Kanten ist, so muss auch jede der Kanten parallel zu jener Geraden sein, nach welchen zwei Seitenebenen des Prisma von der Durchschnittsebene geschnitten werden. Solche zwei Gerade aber, welche sich auf der Oberfläche des Prisma befinden und parallel zu seinen Kanten sind, müssen auch (§. 28.) parallel zu seiner Erzeugenden sein, und sind mithin zwei Lagen dieser Generatrix. Es folgt also hieraus, dass der Durchschnitt eines unbegränzten Prisma mit einer Ebene ein unbegränzter Raum ist, und zwar zwei Gerade, welche parallel mit der Erzeugenden sind. Ist das Prisma begränzt, so werden auch (§. 33.) seine beiden Grundflächen nach zwei unter sich parallelen Geraden von jener Durchschnittsebene geschnitten, und es ist mithin der Durchschnitt eines begränzten Prisma durch eine Ebene ein Parallelogramm. —

Um nun bei einem unbegränzten Prisma seinen Durchschnitt mit einer Ebene zu finden, welche parallel zur Erzeugenden ist, bestimme man vor Allem eine Spur des Prisma, z. B. seine horizontale Spur (nach §. 167.), so muss diese von der Durchschnittsebene geschnitten werden. Die Punkte nun, in welchen der Umfang der horizontalen Spur des Prisma von der horizontalen Spur der Ebene getroffen wird, liegen sowohl auf dem Prisma (weil sie seiner Spur angehören), als auch in der Durchschnittsebene (weil sie auf ihrer horizontalen Spur sich befinden), und gehören mithin den Durchschnittslinien der Ebene mit dem Prisma an. Da aber diese letzteren parallel zur Erzeugenden sind, so darf man nur durch jeden der Punkte, in welchem die horizontale Spur des Prisma von der horizontalen Spur der Ebene getroffen wird, eine Gerade (§. 76.) parallel zur Generatrix legen, so erhält man die beiden Geraden, nach welchen das Prisma von der Ebene geschnitten wird. Diese Durchschnittslinien treffen die Direktrix des Prisma in Punkten, welche der Durchschnittsebene und dieser Direktrix angehören müssen; verbindet man daher dieselben durch eine Gerade, so wird diese der Durchschnitt der Direktrix mit der gegebenen Ebene sein. —

§. 171.

Beispiel. (Fig. 120.) Ist ABCD die horizontale Spur eines Prisma, G die horizontale und 'G die vertikale Projektion seiner Generatrix, und man schneidet dasselbe durch eine Ebene ES'E, die parallel mit der Generatrix ist, so ist jeder der Punkte M und N, welche die horizontale Spur ABCD des Prisma mit der horizontalen Spur E der Ebene ES'E gemeinschaftlich hat, den Durchschnitten der Ebene mit dem Prisma angehörig. Da nun diese Durchschnitte Parallele zu G, 'G sein, und die Punkte M und N enthalten müssen, so werden ihre horizontalen Projektionen parallel mit G sein und durch M und N gehen, und ihre vertikalen Projektionen werden die durch 'M und 'N gehenden und mit 'G parallel gezogenen Geraden sein; daher ist MP, 'M'P die eine, NQ, 'N'Q die andere Gerade, nach welcher die Oberfläche des Prisma von der mit G, 'G parallelen Ebene geschnitten wird. —

§. 172.

Aufgabe 42. Ein auf der horizontalen Tafel senkrecht stehendes Prisma ist durch eine Ebene abgeschnitten; man soll die Oberfläche dieses Prisma abwickeln und in eine Ebene legen, sodann den Durchschnitt jener Ebene mit der Oberfläche des Prisma angeben.

Auflösung. Dreht man die erste Seitenebene um die mit der zweiten Seitenebene gemeinschaftliche Kante, bis dieselbe in die Verlängerung dieser zweiten Seitenebene fällt, so beschreibt jeder Punkt der ersten Seitenebene einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der gemeinschaftlichen Kante der ersten und zweiten Seitenebene steht. Da nun die einzelnen Kanten des Prisma senkrecht auf der horizontalen Tafel, also auch senkrecht auf den Seiten seiner horizontalen Spur sind, und (§. 23.) die horizontale Spur der ersten Seitenebene des Prisma auch senkrecht auf der mit der zweiten Seitenebene gemeinschaftlichen Kante bleibt, so wird die horizontale Spur der ersten mit der horizontalen Spur der zweiten Seitenebene in eine Gerade fallen, die senkrecht auf ihrer gemeinschaftlichen Kante ist, sobald die erste Seitenebene in der Verlängerung der zweiten Seitenebene liegt. Dreht man ebenso die Ebene der beiden ersten Seitenebenen um die Kante, welche die zweite mit der dritten Seitenebene gemeinschaftlich hat, bis die beiden ersten Seitenebenen in die Verlängerung der dritten Seitenebene fallen, so wird wieder die horizontale Spur dieser letzteren senkrecht auf der mit der zweiten Seitenebene gemeinschaftlichen Kante bleiben, und mit den horizontalen Spuren der letzteren in eine Gerade fallen. Auf diese Weise fortgefahren kann man die ganze Oberfläche entwickeln. — Man ersieht also hieraus, dass wenn man ein senkrechtes Prisma entwickelt, der Perimeter seiner Grundfläche eine Gerade wird, die senkrecht auf der Kante des Prisma steht, und gleich seiner vorigen Länge ist. Oder allgemeiner: wenn man ein Prisma entwickelt, so bleibt der Umfang des auf eine Kante senkrecht gelegten Schnittes senkrecht auf jeder Kante, und verwandelt sich nach der Abwickelung in einer Gerade von der ursprünglichen Länge. Hieraus folgt also die Regel, ein senkrecht auf der horizontalen Tafel stehendes Prisma abzuwickeln, und diese besteht in Folgendem:

1. Ziehe man eine beliebige Gerade in der Ebene, in welcher man die Oberfläche des Prisma ausbreiten will, und trage auf diese Gerade alle Seiten der horizontalen Spur des Prisma.
2. Ziehe man von den Endpunkten der auf jene Gerade getragenen Seiten senkrechte Gerade auf letztere, und mache diese gleich den einzelnen Theilen der Kanten, welche zwischen der horizontalen Tafel und der Schnittebene liegen.
3. Verbinde man die Endpunkte dieser Kanten durch Gerade, so erhält man den Umfang der Durchschnittsfigur, welche nun mit dem Prisma abgewickelt ist.

§. 173.

Beispiel 1. (Fig. 117.) Ist ABCDEF die horizontale Spur eines auf der horizontalen Tafel senkrecht stehenden Prisma, welches von der auf der vertikalen Tafel senkrecht stehenden Ebene HSV abgeschnitten wird, und man soll dieses Prisma mit der Durchschnittsfigur abwickeln, so ziehe man (Fig. 117. a.) die Gerade $A_1 A_{11}$, mache $A_1 B_1 = AB$, $B_1 C_1 = BC$, $C_1 D_1 = CD$, $D_1 E_1 = DE$, $E_1 F_1 = EF$, so ist $A_1 F$ die Gerade, in welche sich (§. 172.) die Grundfläche der Figur bei der Entwickelung des Prisma verwandelt. Zieht man nun die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ etc. etc. senkrecht auf $A_1 A_{11}$, und macht $A_1 A_2 = {}'A\,'a$, $B_1 B_2 = {}'B\,'b$, $C_1 C_2 = {}'C\,'c$ etc. etc., zieht sodann $A_2 B_2$, $B_2 C_2$ etc. etc., so wird $A_2 A_1 A_1 A_2$ das entwickelte Prisma, und zwar derjenige Theil desselben sein, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der auf der vertikalen Tafel senkrecht stehenden Schnittebene liegt. —

Beispiel 2. (Fig. 121.) ABCD sei ein in der horizontalen Tafel liegendes Parallelogramm,

über welches ein Prisma senkrecht errichtet werden soll; man soll dieses Prisma durch die beliebig gegen die Tafeln geneigte Ebene ES'E abschneiden, und das Prisma sammt diesem Schnitte entwickeln. Vor Allem verlängere man AB bis zur Axe X, ziehe vom Durchschnittspunkte q der Geraden AB mit X auf letztere eine Senkrechte qq', so kann man A q q' als eine Hülfsebene betrachten, welche die Kanten 'AM, A und 'BN, B enthält. Zieht man daher mm' senkrecht auf X, verbindet m' mit q' durch eine Gerade, so werden die Durchschnittspunkte der letzteren mit 'AM und 'BN, nämlich 'a und b' die vertikalen Projektionen der Durchgangspunkte der Senkrechten 'A 'M, A und 'B 'M, B in die Ebene ES'E sein. Auf gleiche Weise kann man (mit Hülfe des §. 114.) die vertikalen Projektionen der Durchgangspunkte der übrigen Kanten in die Ebene ES'E finden. Die horizontalen Projektionen dieser Durchgangspunkte liegen in A, B, C und D, weil die einzelnen Kanten des Prisma senkrecht auf der horizontalen Tafel stehen. Die wahre Grösse dieses Schnittes kann nach §. 168. angegeben werden. Um nun dieses Prisma sammt dem erhaltenen Schnitte zu entwickeln, ziehe man A_1A_1, mache $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1D_1 = CD$, $D_1A_1 = DA$, so wird A_1D_1 der entwickelte Umfang der horizontalen Spur des Prisma sein. Errichtet man nun A_1A_2 senkrecht auf A_1D_1, so entspricht diese Senkrechte der Kante, deren horizontale Projektion A, und deren vertikale Projektion 'AM ist. Ferner ziehe man B_1B_2 senkrecht auf A_1D_1, so entspricht dieselbe der Kante B, 'BN; errichte ferner auf A_1D_1 die Geraden C_1C_2 und D_1D_2 senkrecht, so entspricht die erste derselben der Kante 'CP, C und die zweite der Kante 'DQ, D. Macht man nun auch $A_1A_2 =$ 'a 'A, $B_1B_2 =$ 'b 'B, $C_1C_2 =$ 'c 'C und $D_1D_2 =$ 'D 'd, und zieht die Geraden A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2, so erhält man das entwickelte Prisma $A_2B_2C_2D_2A_2A_1A_1$. —

§. 174.

Aufgabe 43. Ein beliebiges Prisma ist durch eine Ebene abgeschnitten, man soll das Prisma sowie den Schnitt entwickeln.

Auflösung. Aus §. 172. ist bekannt, dass wenn man ein Prisma entwickelt, jeder auf seiner Kante senkrecht stehende Schnitt bei der Entwickelung des Prisma sich in eine Gerade verwandelt, auf welcher die Kanten senkrecht bleiben. Legt man daher senkrecht auf eine Kante des gegebenen Prisma eine Ebene senkrecht, und bestimmt ihre Durchschnittsfigur mit dem Prisma, so kann man den zwischen dieser Figur und der zweiten Durchschnittsfigur enthaltenen Theil des Prisma sowohl, als auch den zwischen dem senkrechten Schnitte und der horizontalen Tafel liegenden Theil, entwickeln, wenn man genau nach den Regeln des vorigen §. und des §. 172. verfährt, und die Länge der Kantentheile des Prisma vor der Entwickelung desselben bestimmt. —

§. 175.

Beispiel. (Fig. 122.) Es sei ABCDE die horizontale Spur eines Prisma und G'G die Projektionen seiner Generatrix, man soll den Durchschnitt dieses Prisma durch die Ebene $E_1SE'_1$ angeben, und das Prisma mit diesem Schnitte entwickeln. Wir ziehen V'S senkrecht auf 'G und 'SH senkrecht auf G, so erhalten wir (§. 84.) die Spuren einer Ebene H'SV, welche senkrecht auf den Kanten des Prisma, also auf letzterem selbst senkrecht steht. Bestimmen wir nun den Durchschnitt dieser Ebene mit dem Prisma, so erhalten wir (§. 170.) die Projektionen mnpqr, m'n'p'q'r' dieses Durchschnittes. Entwickelt man nun das Prisma, so wird dieser Durchschnitt (nach §. 172.) sich in eine Gerade verwandeln, die gleich der Länge seines Umfanges ist. Legt man daher diese Hülfsebene in eine der Tafeln, und bestimmt den Durchschnitt in dieser umgelegten Ebene, trägt sodann auf die Gerade a_2k diesen Umfang, so dass m_2m_2 gleich der Länge von $m_1n_1p_1q_1r_1$ wird, so werden die Kanten des Prisma bei seiner Entwickelung senkrecht auf m_2m_2 zu stehen kommen. Bestimmt man den Durchschnitt der Ebene $E_1S'E_1$ mit dem Prisma, welcher abcde, a'b'c'd'e' sein wird, und zieht die Geraden m_2A_1, n_2B_1, p_2C_1, q_2D_1, r_2E_1, m_1A_1 senkrecht auf m_2k, macht $m_2A_1 =$ der Länge Geraden (ma, m'a'), $n_2B_1 =$ der Länge der Geraden (nb, n'b'), $p_2C_1 =$ der Länge der Geraden (p'c', pc), und $q_2D_1 =$ der Länge von (qd, q'd'), zieht sodann A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1 und E_1A_1, so erhält man den Theil der Oberfläche vom gegebenen Prisma, welcher zwischen der senkrechten Hülfsebene und der gegebenen Ebene liegt. Nun verlängere man die Kanten A_1m_2, B_1n_2 etc. etc., mache $m_2A_2 =$ der Länge der Kante ('m'A, mA), $n_2B_2 =$ der Länge von (nB, 'n'B), p_2C_2 gleich der Länge von (pC, p'C') und $q_2D_2 =$ der Länge der Geraden (qD, q'D'), ziehe A_2B_2, B_2C_2 etc. etc., so ist $m_2A_2B_2C_2D_2A_2m_2$ derjenige Theil der Oberfläche, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der Ebene H'SV liegt, folglich ist $A_1A_2B_2D_2A_2A_1D_1B_1$ derjenige Theil der Oberfläche des Prisma, welcher zwischen der horizontalen Tafel und der gegebenen Durchschnittsebene liegt. —

§. 176.

Bewegt sich eine Gerade, die stets durch einen bestimmten Punkt geht, an dem Perimeter irgend einer ebenen geradlinigen Figur fort, so entsteht ein Körper, welcher Pyramide genannt wird, von welcher die sich bewegende Gerade die Generatrix und die Figur, an welcher sich diese Generatrix fortbewegt, Direktrix genannt wird. Der Punkt, durch welchen die Generatrix bei ihrer Bewegung stets gehen muss, wird Centrum oder Scheitel der Pyramide genannt. Sind die Theile der Erzeugenden einer Pyramide, welche zwischen dem Centrum und der Direktrix liegen, gleich lang, so werden auch (nach §. 18.) die Endpunkte dieser Theile der Generatrix vom Fusse derjenigen Senkrechten, welche vom Centrum auf die Ebene der Direktrix gezogen wird, gleiche Entfernung haben, und man nennt die Pyramide in diesem Falle eine senkrechte. Die vom Centrum einer Pyramide auf die Ebene ihrer Direktrix gezogene Senkrechte wird ihre Höhe und sodann die Direktrix ihre Grundfläche genannt, wenn man sich die Pyramide bloss bis zur Direktrix und nicht weiter ausgedehnt denkt. Die einzelnen Lagen der Generatrix, welche durch die Scheitel der Direktrix gehen, werden die Kanten, auch Seitenlinien der Pyramide genannt. —

§. 177.

Die Erzeugung der Pyramide gibt uns wieder ein Mittel an, um dieselbe darstellen zu können. Wir wissen nämlich, dass

1. ein fixer Punkt, nämlich das Centrum der Pyramide zu wissen nothwendig ist;
2. eine ebene Figur bekannt sein muss, welche die Direktrix der Pyramide ist.

Um daher eine Pyramide darzustellen, geben wir die Projektionen ihres Centrums sowohl, als auch die Projektionen ihrer Direktrix an, ziehen durch die vertikale Projektion des Centrums Gerade, die durch die vertikalen Projektionen der Scheitel der Direktrix gehen, und ebenso ziehen wir durch die horizontale Projektion des Centrums gerade Linien, die durch die horizontalen Projektionen der Scheitel der Direktrix gehen, so erhalten wir die Projektionen der Kanten der Pyramide, wodurch man sich letztere sowohl, als auch ihre Oberfläche vorstellen kann, wenn man durch je zwei auf einander folgende Lagen dieser Kanten eine Ebene gelegt denkt. Diese Ebenen geben Theile der Oberfläche an, und werden Seitenebenen oder Seitenflächen der Pyramide genannt. —

§. 178.

(Fig. 123.) Schneidet man die Pyramide, deren Grundfläche A B C D E sein soll und deren Centrum in S ist durch eine Ebene, die parallel zur Ebene der Grundfläche A B C D E ist, so erhält man eine Durchschnittsfigur von eben so vielen Seiten, als wie viele die Grundfläche hat, weil jede Kante der Pyramide jene Ebene trifft, und die Verbindungslinien der einzelnen Durchgangspunkte die Durchschnittsfigur begränzen. Diese letztere hat aber mit der Grundfläche noch andere Beziehungen. Sind nämlich a, b, c, d, e die Durchgangspunkte der einzelnen Pyramidenkanten in jene Ebene, also a b c d e die Durchschnittsfigur, so müssen die Durchschnittslinien der Ebenen a b c d e und A B C D E mit S A B, nämlich a b und A B (§. 33.) unter sich parallel sein, ebenso muss auch b c ∥ B C, c d ∥ C D, d e ∥ D E und e a ∥ E A sein. Nun muss aber auch (nach §. 36.), ∠ a b c = ∠ A B C, ∠ b c d = ∠ B C D, ∠ c d e = ∠ C D E und ∠ d e a = ∠ D E A sein, und da A B : a b = B S : b S und B C : b c = B S : b S, also A B : a b = B C : b c; ferner B C : b c = C S : c S = B S : b S und C D : c d = c S : c S, so hat man a b : A B = b c : B C = c d : C D etc. etc. und es wird also

a b c d e ∾ A B C D E

sein. Da nun diess von irgend zwei Figuren, deren Scheitel in den Kanten einer Pyramide liegen, und deren Ebenen parallel sind, gezeigt werden kann, so folgt hieraus der Satz:

Schneidet man eine Pyramide durch zwei parallele Ebenen, so müssen die erhaltenen Durchschnittsfiguren unter sich ähnlich sein.

Anmerk. 1. Kennt man eine dieser beiden Figuren und eine Seite der andern, so kann man leicht diese letztere konstruiren, weshalb also auch der Durchschnitt einer Pyramide durch eine Ebene, die parallel zur Ebene einer auf der Pyramide schon angegebenen Figur ist, leicht bestimmt werden kann. —

Anmerk. 2. (Fig. 123.) Denkt man sich von S aus auf die Ebene A B C D E eine Senkrechte S M gezogen, und durchschneidet diese die Ebene a b c d e in m, so ist wieder (§. 33.) a m ∥ A M, und mithin

a m : A M = m S : M S oder

a b : A B = m S : M S, also auch

$\overline{ab^2} : \overline{AB^2} = \overline{mS^2} : \overline{MS^2}$,

Nun ist aber auch

$\overline{AB^2} : \overline{ab^2}$ = A B C D E : a b c d e oder

$\overline{ab^2} : \overline{AB^2}$ = a b c d e : A B C D E,

folglich hat man

a b c d e : A B C D E = $\overline{mS^2} : \overline{MS^2}$,

woraus also folgt:

zwei parallele Schnitte einer Pyramide verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Abstände vom Centrum.

§. 179.

(Fig. 123.) Es werde durch S eine beliebige Ebene gelegt, welche die Ebene ABCDE nach der Geraden KL schneidet. Zieht man nun die Geraden SL und SK, so wird die erstere in der Ebene BSC und die letztere in der Ebene SAE liegen. Da aber nur diese beiden Geraden in der Ebene und in der Aussenfläche der Pyramide zugleich liegen, und dieselben auch die Direktrix der Pyramide bei gehöriger Verlängerung treffen, wenn nicht schon ABCDE dieselbe ist, so ist SL eine und SK eine andere Lage der Generatrix der gegebenen Pyramide, und es folgt mithin der Satz:

Schneidet man eine Pyramide — die unbegränzt ist — durch eine Ebene, welche durch das Centrum der Pyramide geht, so erhält man zwei Lagen der Erzeugenden der Pyramide; ist aber die Pyramide begränzt, so erhält man als Durchschnitt ein Dreieck, von welchem zwei Seiten jene beiden Lagen der Erzeugenden sind, die dritte aber der Durchschnitt der Grundfläche — oder der Begränzungsebene — mit der Durchschnittsebene ist.

§. 180.

Aufgabe 44. Es ist die Direktrix einer Pyramide durch ihre Projektionen gegeben und ihr Centrum durch seine Projektionen; man soll

1. die Pyramide konstruiren und ihre Projektionen angeben,
2. ihre Durchschnittsfiguren mit den Projektionstafeln, nämlich ihre Spuren angeben.

Auflösung. Um die Projektionen der Pyramide zu erhalten, müssen wir die Projektionen ihrer einzelnen Kanten (§. 177.) angeben, und durch zwei auf einander folgende Kanten eine Ebene gelegt denken. Wir ziehen daher durch die vertikale Projektion des Centrums Gerade nach den vertikalen Projektionen der Scheitel der Direktrix, sodann durch die horizontale Projektion des Centrums Gerade nach den horizontalen Projektionen der Scheitel der Direktrix, so erhalten wir (§. 72.) die Projektionen der einzelnen Kanten der Pyramide, weil diese (§. 176.) durch das Centrum und die einzelnen Scheitel der Direktrix gehen müssen. Denkt man sich nun (§. 101.) durch zwei auf einander folgende Kanten eine Ebene gelegt, so erhält man die Seitenflächen der Pyramide, und man kann sich daher letztere leicht vorstellen. —

Nun muss die horizontale Spur sowohl, als auch die vertikale Spur der Pyramide bestimmt werden. Zu diesem Zwecke müssen wir uns jede Seitenfläche derselben so weit verlängert denken, bis sie die Tafeln trifft, und die einzelnen Spuren dieser Seitenebenen angeben; so werden die vertikalen Spuren sowohl, als auch die horizontalen eine Figur von ebenso viel Seiten, als die Direktrix hat, bilden, wodurch man die Spuren der Pyramide erhält. Da aber durch diese Verlängerung der Seitenebenen bis zu den Projektionstafeln zugleich die Spuren einer jeden Kante bestimmt werden, und diese Spuren in den Spuren ihrer entsprechenden Seitenebenen liegen müssen, so werden die einzelnen Seiten der Spuren der Pyramide durch die Spuren der Kanten gehen müssen. Um daher die Spuren der Pyramide zu erhalten, bestimmen wir die Spuren einer jeden Kante, und verbinden die horizontalen Spuren sowohl, als auch die vertikalen in derselben Ordnung durch Gerade, in welcher die Scheitel der Direktrix auf einander folgen.

§. 181.

Beispiel. (Fig. 124.) Ist ABCD die horizontale und 'A B'C'D' die vertikale Projektion eines im Raume angegebenen Parallelogrammes, das als Direktrix einer Pyramide dienen soll, von welcher (S, 'S) die Projektionen des Centrums sind, so ziehe man die Geraden SA, 'S'A, und es werden diese die Projektionen der durch den Punkt A, 'A gehenden Pyramidenkanten sein. Ebenso ziehe man SB und 'SB', SC und 'S'C, SD und 'SD', so erhält man die Projektionen der durch die Punkte (B, B'), (C, C'), (D, D') gehenden Kanten der Pyramide, und folglich ist SABCD die horizontale, 'S'A'B'C'D die vertikale Projektion desjenigen Theiles der Pyramide, welcher zwischen der Direktrix und dem Scheitel S, 'S liegt. Verlängert man die Projektionen der einzelnen Kanten auch gegen die andere Seite, so erhält man auch den zweiten Theil oder das zweite Fach der angegebenen Pyramide. Nun bestimme man (nach §. 95.) die horizontalen Spuren G, H, K, L und sodann die vertikalen Spuren M, N, P, Q der einzelnen Kanten, verbinde die letzteren Punkte durch die Geraden MN, NP, PQ, QM und ebenso die ersteren durch die Geraden GH, HK, LK und KG, so wird die MNPQ die vertikale und GHKL die horizontale Spur der angegebenen Pyramide sein. —

§. 182.

Aufgabe 45. Eine Pyramide ist durch ihre horizontale Spur und durch die Projektionen ihres Centrums gegeben; man soll

1. **die Projektionen dieser Pyramide angeben.**
2. **Die Projektionen der Durchschnittsfigur einer durch ihre Spuren angegebenen Ebene mit dieser Pyramide bestimmen.**
3. **Die wahre Grösse dieser Durchschnittsfigur angeben.**

Auflösung. Sollen die Projektionen der Pyramide bestimmt werden, so betrachte man ihre horizontale Spur als ihre Direktrix, und denke sich die Pyramide dadurch erzeugt, dass eine Gerade am Umfange dieser Direktrix sich so fortbewegt, dass sie stets durch das gegebene Centrum geht. Projicirt man also diese horizontale Spur vertikal, und zieht durch die horizontale Projektion des Centrums nach den einzelnen Scheiteln der horizontalen Spur Gerade, so erhält man die horizontalen Projektionen der Kanten der Pyramide, und durch die einzelnen vertikalen Projektionen der von der horizontalen Spur der Pyramide angegebenen Scheitel nach der vertikalen Projektion des Centrums Gerade gezogen, werden die vertikalen Projektionen der einzelnen Pyramidenkanten sein, und man kann sich daher leicht die Pyramide selbst vorstellen. —

Um nun den Durchschnitt der Pyramide mit der angegebenen Ebene zu bestimmen, muss man sich die einzelnen Seitenebenen derselben bis zum Durchschnitte mit der gegebenen Ebene verlängert denken. Da aber bei dieser Verlängerung der einzelnen Seitenebenen auch die Kanten der Pyramide bis zum Durchschnitte mit der angegebenen Ebene verlängert werden, und mithin ihre Durchgangspunkte auf den Communsektionen der einzelnen Seitenebenen der Pyramide mit der gegebenen Ebene liegen müssen, so gehen die Seiten der gesuchten Durchschnittsfigur durch die einzelnen Durchgangspunkte der Kanten mit der gegebenen Ebene. Man e hält daher die Projektionen des Durchschnittes der Pyramide und der gegebenen Ebene, wenn man nach §. 114. die Durchgangspunkte der einzelnen Kanten der Pyramide mit der gegebenen Ebene aufsucht, sodann die vertikalen Projektionen sowohl, als auch die horizontalen Projektionen dieser Durchgangspunkte durch Gerade verbindet, und zwar in derselben Ordnung, in welcher die Scheitel der horizontalen Spur der Pyramide auf einander folgen. —

Es bleibt nun noch übrig die wahre Grösse dieses Durchschnittes anzugeben. Zu diesem Zwecke drehe man die Durchschnittsebene um eine ihrer Spuren, z. B. um ihre vertikale Spur, und lege sie in die vertikale Tafel, bestimme sodann nach §. 130. in dieser umgelegten Ebene einen jeden Scheitel der Durchschnittsfigur, verbinde diese einzelnen Punkte in derselben Ordnung durch Gerade, in welcher die Scheitel der Direktrix verbunden sind, so erhält man die wahre Grösse der verlangten Durchschnittsfigur. —

§. 183.

Beispiel. (Fig. 125.) Es sei ABCDE ein in der horizontalen Tafel liegendes regelmässiges Fünfeck, das die horizontale Spur einer Pyramide sein soll, S sei die horizontale und 'S die vertikale Projektion des Scheitels dieser Pyramide, so ziehe man die Geraden SA, SB, SC, SD, SE, und man erhält hierdurch die horizontalen Projektionen der einzelnen Kanten der Pyramide. Da nun die vertikale Projektion von ABCDE (nach §. 70.) in X liegen muss, so hat man nur die Senkrechten A'A, B'B, C'C, DD' und E'E auf X zu ziehen, so erhält man die vertikale Projektion 'A'C der horizontalen Spur der Pyramide. Zieht man nun 'SA', S'B', 'SC', 'SD' und 'S'E, so werden diese Geraden die vertikalen Projektionen der einzelnen Pyramidenkanten und mithin 'S'A'C die vertikale Projektion des zwischen dem Scheitel S'S und der horizontalen Tafel liegenden Theiles der Pyramide sein. Diese Pyramide ist nun von der Ebene HSV geschnitten, welche senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, man soll die Durchschnittsfigur angeben. Da die Ebene HSV senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, so liegt (§. 83.) die vertikale Projektion einer jeden in derselben enthaltenen Geraden oder Figur in der vertikalen Spur dieser Ebene, nämlich in V. Die vertikalen Projektionen der Scheitel des Durchschnittes müssen aber nach vor. §. in den vertikalen Projektionen der Kanten der Pyramide enthalten sein; folglich ist 'a'c die vertikale Projektion der Durchschnittsfigur, von welcher 'a, b', 'c, d', 'e, nämlich die Durchschnitte der Geraden V mit den vertikalen Projektionen 'S'A, 'S'B etc. etc. der Kanten, die vertikalen Projektionen der Scheitel des Durchschnittes sind. Nun müssen die horizontalen Projektionen dieser Scheitel in den Projektionen SA, SB etc. etc. der Kanten sein (§. 72.), weil sich die Scheitel selbst auf den Kanten befinden; zieht man daher 'aa senkrecht auf X, so wird (§. 72.) im Durchschnitte dieser Senkrechten mit SA, nämlich in a die horizontale Projektion des Scheitels sein, dessen vertikale Projektion in 'a ist. Auf gleiche Weise erhält man die horizontalen Projektionen c, d, e der

einzelnen Scheitel, und es ist nur noch die horizontale Projektion desjenigen Scheitels anzugeben, dessen vertikale Projektion in b′ ist. Die durch den Punkt BB′ gehende Pyramidenkante liegt nämlich in einer Ebene, welche senkrecht auf X steht, weshalb man nicht unmittelbar die horizontale Projektion des auf dieser Kante liegenden Scheitels angeben kann. Da aber B die horizontale Spur dieser Kante sein muss, und ihre vertikale Spur K nach §. 94. erhalten werden kann, so ziehe man die Gerade Bs_1 willkührlich, verlängere sie bis zum Durchschnitte mit X, ziehe von dem hierdurch erhaltenen Durchschnittspunkte nach K eine Gerade, verlängere letztere bis s'_2, und betrachte nun E_1, $'E_1$ als die Spuren einer Ebene, so wird diese letztere die Kante (SB, 'S 'B) enthalten. Nun ziehe man $s'_2 s_2$ senkrecht auf X, verbinde s_2 mit s_1 durch eine Gerade, so ist $s_1 s_2$ die horizontale Projektion der Communsektion von Ebene E_1 $'E_1$ und Ebene HSV (nach §. 110.), und der Durchschnittspunkt von $s_1 s_2$ mit SB, nämlich b ist (nach §. 114.) die horizontale Projektion des Durchgangspunktes der Kante (SB, 'SB') in die Ebene HSV. Zieht man also die Geraden ab, bc, cd, de und ea, so wird abcde die horizontale Projektion der Durchschnittsfigur von Ebene HSV mit der gegebenen Pyramide sein. —

Anmerk. Den Punkt b kann man auch auf eine andere und einfachere Weise bestimmen. Dreht man nämlich die Ebene HSV, bis sie parallel zur horizontalen Tafel wird, und nimmt (BB′, b′) als Drehungsaxe an, so wird die neue vertikale Projektion der Durchschnittsfigur die Gerade 'fg sein, ihre horizontale Projektion aber muss nach §. 178. ähnlich der Figur ABCDE sein. Nun ist 'f die vertikale Projektion eines Scheitels der Durchschnittsfigur, dessen horizontale Projektion (§. 72.) in der Geraden AS liegen muss und daher (§. 73.) in f sein wird, und mithin wird die von f aus mit AB parallel gezogene Gerade die horizontale Projektion einer Seite der Figur sein, nach welcher die mit der horizontalen Tafel parallel gelegte Ebene 'fg die Pyramide schneidet. Da nun die horizontale Projektion des Scheitels, dessen vertikale Projektion in b′ ist, sowohl in BS, als auch in fb liegen muss, so wird der Durchschnittspunkt dieser beiden die horizontale Projektion des Punktes sein, dessen vertikale Projektion in b′ ist.

§. 184.

Aufgabe 46. Eine Pyramide ist durch eine Ebene abgeschnitten; man soll den zwischen dieser Ebene und einer ihrer Spuren enthaltenen Theil derselben entwickeln.

Auflösung. Wir wollen hier zwei Fälle unterscheiden, und jeden derselben einzeln behandeln. Es sei nämlich

1. die Pyramide eine senkrechte, mit regelmässiger Grundfläche.
2. Die Pyramide habe eine beliebig vielseitige Grundfläche.

Ad. 1. Hat eine Pyramide eine regelmässige Grundfläche, und geht die von ihrem Scheitel aus auf letztere gezogene Senkrechte (Axe) durch den Mittelpunkt dieser Grundfläche, so müssen die Kanten der Pyramide (§. 18.) gleich lang sein; folglich ist bei dieser Pyramide jede Seitenfläche ein gleichschenkliges Dreieck. Legt man nun die einzelnen Seitenflächen, indem man sie um ihre Kanten dreht, in eine Ebene, so wird die Figur, welche die Entwickelung der Pyramide ist, einen Ausschnitt eines regelmässigen Polygones bilden, dessen Mittelpunkt mit dem der Pyramide zusammenfällt, von welchem ferner eine Kante der Pyramide der Halbmesser des umschriebenen Kreises ist, und die einzelnen Seiten der Grundfläche die Sehnen des letzteren sind. Beschreibt man daher aus einem beliebigen Punkte einen Kreisbogen, dessen Halbmesser gleich einer Kante der Pyramide ist, und trägt die einzelnen Seiten der Grundfläche als an einander stossende Sehnen in diesen Kreisbogen, so erhält man die entwickelte Grundfläche. Von den einzelnen Endpunkten der Sehnen aus die Halbmesser dieses Kreisbogens gezogen, geben die einzelnen Kanten, und durch je zwei auf einander folgende der letzteren eine Ebene gelegt, so erhält man auch die einzelnen Seitenflächen der Pyramide. Auf diese Weise erhält man also die Entwickelung desjenigen Theiles der Pyramide, welcher zwischen ihrem Centrum und der Grundfläche liegt. Nun bestimme man die Länge jedes Theiles einer Kante, welcher zwischen der Durchschnittsebene und der Grundfläche enthalten ist, trage diese einzelnen Kantentheile von den entsprechenden Scheiteln der entwickelten Grundfläche aus auf die Kanten der entwickelten Seitenflächen, verbinde die erhaltenen Endpunkte in gehöriger Ordnung durch Gerade, so erhält man die entwickelte Durchschnittsfigur, und der zwischen der letzteren und der Grundfläche enthaltene Theil der Oberfläche ist die gesuchte Entwickelung. —

Ad. 2. Hat die Pyramide keine regelmässige Grundfläche, so wird man am kürzesten verfahren, wenn man alle einzelnen Seitenflächen, welche die Theile der Oberfläche sind, konstruirt. Man wird also vor Allem die Länge jeder einzelnen Kante bestimmen, mit je zwei auf einanderfolgenden Kanten und der zwischen denselben enthaltenen Seite der

Grundfläche (oder Direktrix) ein Dreieck konstruiren, so erhält man die Entwickelung des zwischen dem Centrum und der Grundfläche enthaltenen Theiles der Oberfläche. Bestimmt man nun die Länge der einzelnen Kantentheile, welche zwischen der Grundfläche und der Durchschnittsebene enthalten sind, und trägt dieselben von den entsprechenden Scheiteln der entwikelten Grundfläche aus auf die Kanten, verbindet die erhaltenen Endpunkte in derselben Ordnung durch Gerade, in welcher die Scheitel der Grundfläche unter einander verbunden sind, so erhält man auch die Entwickelung der Durchschnittsfigur, welche die Gränzlinie des zu entwickelnden Theiles der Oberfläche ist.

§. 185.

Beispiel. (Fig. 125.) Es sei ABCDE ein regelmässiges Fünfeck, das in der horizontalen Tafel liegt, über dieses ist eine Pyramide beschrieben, von welcher die horizontale Projektion des Scheitels in S, dem Mittelpunkte des Fünfeckes liegt, und deren Höhe gleich MN ist. Da die horizontale Projektion des Scheitels dieser Pyramide in der Mitte ihrer Grundfläche ist, und dieser Punkt mit dem Fusse der Höhe einerlei ist, so werden alle einzelnen Kanten dieser Pyramide gleich lang sein. Da ferner die Grundfläche in der horizontalen Tafel liegt, so ist die Höhe gleich der vertikalen Ordinate des Scheitels der Pyramide, und es wird daher die vertikale Projektion 'S des letzteren erhalten, wenn man von seiner horizontalen Projektion S aus auf X eine Senkrechte S'B zieht, und 'B'S = MN macht. Zieht man nun A'A, B'B, C'C etc. etc. senkrecht auf X, so erhält man in 'A, 'B, 'C etc. etc. die vertikalen Projektionen der einzelnen Scheitel A, B, C etc. etc., ferner die Geraden 'A'S, 'B'S, 'C'S etc. etc. gezogen, geben die vertikalen, und durch Verbindung der Punkte A, B, C etc. etc. mit dem Punkte S durch Gerade, erhält man die horizontalen Projektionen der einzelnen Kanten der Pyramide, so dass also ABCDES die horizontale und 'A'C'S die vertikale Projektion der Pyramide ist, deren Direktrix ABCDE sowohl, als auch deren Höhe MN gegeben ist. Nun wurde in §. 184. gezeigt, dass man zur Entwickelung des zwischen der Ebene HSV und der horizontalen Tafel enthaltenen Theiles dieser angegebenen Pyramide vor Allem mit der Länge einer der Kanten von einem beliebigen Punkte aus einen Kreisbogen beschreiben muss, auf diesen die einzelnen Seiten der Grundfläche als an einander stossende Sehnen zu tragen hat, und die einzelnen Endpunkte dieser Sehnen durch Gerade mit dem angenommenen Mittelpunkte verbinden muss, wenn man den zwischen dem Scheitel und der horizontalen Tafel enthaltenen Theil der Pyramide erhalten will. Ziehen wir also SC ≠ X und machen SL = SC, fällen von L auf X die Gerade 'L'L' senkrecht, und ziehen 'S'L', so wird diese Gerade (nach §. 91. 2.) die Länge einer Pyramidenkante sein. (Fig. 125. a.) Beschreibt man daher von S_1 aus mit der Geraden S_1A_1 = 'S'L' einen Kreisbogen, macht $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1A_1 = AB$, und zieht S_1A_1, S_1B_1 etc. etc., so wird $A_1B_1C_1D_1E_1A_1S_1$ die entwickelte Pyramide sein. (Fig. 125.) Nun ziehe man am_1 senkrecht auf aA, mache $am_1 = 'an_1$ und ziehe Am_1, so ist diese Gerade (§. 87. und §. 88.) die Länge von (Aa, 'A'a). Ebenso bestimme man Bm_2, Cm_3, Dm_4 etc. etc., so erhält man die Längen der Kantentheile (Bb, 'B'b), (Cc, 'C'c) etc. etc. (Fig. 125. a.) Nun mache man a_2A_2 gleich Am_1, $B_2b_2 = Bm_2$ etc. etc., ziehe a_2b_2, b_2c_2, c_2d_2, etc. etc., so wird $a_2b_2c_2d_2e_2a_2$ der entwickelte Schnitt und mithin $a_2A_2B_2C_2D_2E_2a_2e_2d_2c_2b_2$ der entwickelte Theil der Pyramides sein, welcher zwischen der Ebene HSV und der horizontalen Tafel liegt.

§. 186.

Aufgabe 47. Es sind zwei Prismen angegeben, von welchen das eine vom anderen durchdrungen wird; man soll die Durchschnittslinie dieser beiden Prismen bestimmen.

Auflösung. Es ist aus §. 170. bekannt, dass wenn man ein Prisma durch eine Ebene schneidet, welche parallel ist mit der Erzeugenden des Prisma, zwei Erzeugende erhalten werden. Da nun die Durchdringungslinie zweier Prismen der Ort aller jener Punkte ist, nach welchen sich die einzelnen Erzeugenden beider Prismen durchschneiden, so werden wir die Aufgabe dadurch lösen, indem wir einzelne Erzeugende beider Prismen aufsuchen, von welchen wir wissen, dass sie sich schneiden, ihre Durchschnittspunkte bestimmen, und dieselben durch Gerade in gehöriger Ordnung verbinden. Wenn wir nun eine Hülfsebene annehmen, welche parallel mit der Erzeugenden des ersten sowohl, als auch parallel mit der Erzeugenden des zweiten Prisma ist, so werden beide Prismen von jener Ebene nach geraden Erzeugenden geschnitten, welche letztere sich also schneiden müssen; denn parallel können dieselben nicht sein, weil dann auch (§. 28.) alle Erzeugenden des ersten parallel den einzelnen Erzeugenden des zweiten Prisma, also auch beide unter sich parallel wären, was gegen die Voraussetzung ist. Die Durchschnittspunkte derjenigen Erzeugenden, nach welchen die Hülfsebene beide Prismen schneidet, gehören nun sowohl dem einen, als auch dem an-

dern Prisma an, und liegen mithin auf ihrer gemeinschaftlichen Durchdringungslinie. Um daher letztere zu finden, verfahren wir auf folgende Weise:

1. Nehmen wir einen beliebigen Punkt durch seine Projektionen (§. 65.) an.
2. Ziehen wir durch denselben (nach §. 76.) zwei Gerade durch ihre Projektionen, von welchen die eine parallel der Erzeugenden des ersten, die andere parallel zur Erzeugenden des zweiten Prisma ist.
3. Suchen wir die Spuren der Ebene (§. 101.), welche diese beide Geraden enthält.
4. Legen wir parallel zu dieser Ebene (§. 118.) einzelne Ebenen, welche jedes der beiden Prismen schneiden, und suchen (nach §. 170.) die Projektionen der Durchschnittslinien, so werden die Durchschnittspunkte ihrer horizontalen Projektionen der horizontalen Projektion der Durchdringungslinie, und die Durchschnittspunkte ihrer vertikalen Projektionen der vertikalen Projektion der Durchdringungslinie angehören, und wir erhalten also durch genugsame Wiederholung dieses Verfahrens die gehörige Anzahl von Durchschnittspunkten, durch welche sodann die Durchdringungslinie beider Prismen bestimmt werden kann, wenn man jene Punkte in gehöriger Ordnung durch Gerade verbindet.

Anmerk. 1. Da zur Aufsuchung der Durchschnittserzeugenden eines Prisma mit einer jener Hülfsebenen bloss die horizontalen Spuren der Erzeugenden aufgesucht werden müssen, nach welchen das Prisma von der Hülfsebene geschnitten wird, um diese Erzeugenden selbst bestimmen zu können; so werden wir zur Aufsuchung der einzelnen Punkte der Durchdringungslinie beider Prismen bloss die horizontalen Spuren der Hülfsebenen nothwendig haben; indem die Durchschnittspunkte der letzteren mit den horizontalen Spuren der Prismen schon die horizontalen Spuren der Durchschnittserzeugenden sind, so dass also letztere leicht angegeben werden können.

Anmerk. 2. Die Oberflächen beider Prismen können sich entweder nach zwei Linien durchdringen, oder bloss nach einer einzigen. Um diess zu untersuchen, darf man nur durch die äussersten Punkte der horizontalen Spur des einen Prisma Gerade parallel mit der horizontalen Spur der Hülfsebene legen, und sehen, ob von diesen auch die horizontale Spur des andern Prisma's getroffen wird. Ist diess der Fall, so durchdringen sich beide Prismen nach zwei Linien; schneiden aber die horizontalen Spuren der Hülfsebenen, welche durch die äussersten Punkte der horizontalen Spur des einen Prisma gezogen werden, die horizontale Spur des andern Prisma nicht mehr, so haben beide Prismen bloss eine Durchdringungslinie. Im ersten Falle wird die Durchdringung eine **vollkommene**, im zweiten Falle eine **theilweise** genannt.

§. 187.

Beispiel. (Fig. 126.) Es sei das regelmässige Sechseck ABCDEF die horizontale Spur des ersten Prisma, und (G_1, G'_1) seien die Projektionen seiner Generatrix, $A_1B_1C_1D_1$ sei die horizontale Spur des zweiten Prisma, dessen Generatrix (G_2, G'_2) ist; man soll die Linie finden, welche die Oberflächen dieser beiden Prismen gemeinschaftlich haben.

Nimmt man auf der Generatrix (G_1, G'_1) einen Punkt durch seine Projektionen m und m′ an, zieht durch m′ die Gerade $G' \neq G'_2$ und durch m die Gerade $G \neq G_2$, so werden diese die Projektionen einer durch den Punkt (m, m′) gehenden und mit (G_2, G'_2) parallelen Geraden (§. 76.) sein. Nun bestimme man die horizontale Spur s_1 der Geraden (G_1, G'_1) (nach §. 93.), und sodann die horizontale Spur s_2 der Geraden (G, G′), ziehe $s_1 s_2$, so wird diese (§. 101.) die horizontale Spur der Ebene sein, welche diese beiden Geraden enthält, und die (§. 51.) parallel zur Geraden (G_2, G'_2) ist. Legt man daher mit $s_1 s_2$ parallele Gerade, so werden diese die horizontalen Spuren von Ebenen sein, welche parallel zur Generatrix des ersten Prisma sowohl, als auch parallel zur Generatrix des zweiten Prisma sind (§. 51.). Man ziehe daher $B_1 a_1$ parallel $s_1 s_2$, lege durch a_1 die Gerade $a_1 a_2 \neq G_1$ und durch b_1 die Gerade $b_1 b_2 \neq G_1$, projicire ferner a_1 und b_1 (nach §. 70.), so erhält man in a'_1 und b'_1 ihre vertikalen Projektionen, ziehe $b_1 b'_2 \neq a'_1 a'_2 \neq G'_1$, so erhält man (§. 170.) die Projektionen derjenigen Erzeugenden, welche die Durchschnittslinien der Ebene $a_1 B_1$ mit dem ersten Prisma sind. Das zweite Prisma hat mit dieser Ebene bloss die Kante $(B b_2, B' b'_2)$ gemeinschaftlich, und da letztere mit den Geraden $(a_1 a_2, a'_1 a'_2)$ und $(b_1 b_2, b'_1 b'_2)$ in einer und derselben Ebene liegt, so werden diese Geraden von der Kante $(B b_2, B' b'_2)$ geschnitten. Man erhält also hierdurch die Projektionen zweier Punkte, nämlich a_2, a'_2 und b_2, b'_2, welche beiden Oberflächen, folglich auch ihrer Durchdringungslinie angehören. Dieses Verfahren wiederhole man genugsam, ziehe nämlich $A_1 c_1 \neq s_1 s_2$, $C_1 e_1 \neq s_1 s_2$ etc. etc., so erhält man die Punkte $a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2$ etc. etc., welche beiden Oberflächen, also auch ihren Durchschnittslinien angehören. —

Anmerk. 1. Um zu untersuchen, welche Punkte auf dieser Durchschnittslinie sichtbar oder durch andere Linien verdeckt sind, darf man nur nachsehen, welchen Erzeugenden der Prismen die einzelnen Punkte angehö-

ren. Gehört jeder einzelne dieser Punkte zweien Ergenden an, welche auf beiden Prismen sichtbar sind, so ist der Punkt selbst sichtbar; ist er aber der Durchschnitt zweier Erzeugenden, von welchen nur eine verdeckt ist, so ist der Punkt selbst verdeckt. Auf diese Weise kann man also leicht entscheiden, welcher Theil der Durchdringungslinie sichtbar ist, und welcher Theil derselben verdeckt liegt.

Anmerk. 2. Im vorliegenden Beispiele sind B_1 und D_1 die äussersten Punkte der horizontalen Spur des einen Prisma, und legt man durch dieselben die Ebenen $B_1 a_1$ und $D_1 f_1$ parallel $s_1 s_2$, so schneiden dieselben noch das zweite Prisma, folglich haben wir hier eine vollkommene Durchdringung, und mithin hat die Durchdringungslinie dieser beider Prismen zwei völlig von einander getrennte Theile. Durch diese äussersten Ebenen $B_1 a_1$ und $D_1 f_1$ erhält man zugleich die äussersten Punkte der Durchdringungslinien, weil durch alle anderen ausserhalb der Punkte B_1 und D_1 mit $s_1 s_2$ parallel gezogenen Ebenen höchstens noch das erste Prisma ($ABCDEFH_1$, $'A\,'B\,'C\,'D\,'E$ etc. etc.) getroffen wird, und nicht auch das zweite, so dass also ausserhalb der Ebenen $B_1 a_1$ und $D_1 f_1$ kein Punkt der Durchdringungslinie beider Prismen mehr liegen kann. —

Anmerk. 3. Da alle Erzeugenden des einen Prisma sowohl, als auch die des andern Prisma unter sich parallel sein müssen, und keine Erzeugende des einen Prisma mit einer solchen des zweiten Prisma parallel sein kann (weil sonst die Prismen selbst parallel wären), so müssen diejenigen Erzeugenden des einen Prisma, welche mit denen des andern in einer der Hülfsebenen liegen, sich schneiden, und können nicht parallel sein. Hat man daher alle Scheitel der Grundflächen beider Prismen, so kann man auch alle Scheitel ihrer Durchdringungslinie finden, und mithin ist letztere in unserem vorliegenden Beispiele ein geschlossenes Polygon. Würde eine der Grundflächen beider Prismen nicht geschlossen sein, so wäre die Durchdringungslinie beider Prismen auch nicht geschlossen.

§. 188.

Aufgabe 48. Ein Prisma wird von einer Pyramide durchdrungen, man soll die Linie bestimmen, welche ihre beiden Oberflächen gemeinschaftlich haben.

Auflösung. Auch hier ist wieder die Durchdringungslinie der Ort aller Punkte, welche die Erzeugenden der Pyramide mit denen des Prisma gemein haben. Unsere Aufgabe ist folglich auf die reduzirt: diejenigen Erzeugenden beider Oberflächen, welche sich schneiden, aufzusuchen. Wir wissen nun (aus §. 170.), dass wenn man parallel zur Erzeugenden des Prisma eine Ebene legt, die Oberfläche des letzteren nach einer oder zwei Lagen der Erzeugenden geschnitten wird; ferner ist uns bekannt (aus §. 179.), dass wenn man durch den Scheitel der gegebenen Pyramide eine Ebene legt, welche jene schneidet, dieser Durchschnitt nach zwei Lagen ihrer Erzeugenden geschieht. Legen wir daher durch den Scheitel der gegebenen Pyramide eine Ebene, welche parallel zur Erzeugenden des Prisma ist, und beide Oberflächen schneidet, so wird das Prisma sowohl, als auch die Pyramide von jener Ebene nach einer oder zwei Erzeugenden geschnitten. Diese Durchschnittslinien des Prisma liegen mit denen der Pyramide in der Hülfsebene, und folglich werden die ersteren von den letzteren geschnitten, und hierdurch erhält man Punkte, welche beiden Oberflächen angehören, also auch Punkte ihrer Durchdringungslinie sind. Nun lege man durch den Scheitel der Pyramide mehrere Ebenen, von welchen jede parallel zur Erzeugenden des Prisma ist, und zwar nehme man so viele solcher Hülfsebenen an, welche sowohl das Prisma, als auch die Pyramide schneiden, dass man eine gehörige Anzahl von Punkten erhält, welche ihren beiden Oberflächen angehören, um von letzteren die gemeinschaftliche Durchdringungslinie leicht angeben zu können.

Anmerk. 1. Auch hier hat man für ein gegebenes Beispiel sich die Regel zu merken, dass diejenigen Punkte der gesuchten Durchdringungslinie sichtbar werden, welche die Durchschnitte von nicht verdeckten Erzeugenden beider Oberflächen sind, ein jeder derjenigen Punkte jener Linien aber verdeckt bleibt, welcher dem Durchschnitte zweier Erzeugenden angehört, von welchen wenigstens eine verdeckt ist. Man muss deshalb diejenigen Erzeugenden, welche zur Bestimmung der Durchdringungslinie der beiden gegebenen Oberflächen nothwendig sind und verdeckt liegen von den nicht verdeckten wohl unterscheiden, um die sichtbaren und die verdeckten Punkte erkennen zu können. —

Anmerk. 2. Die Durchdringungslinie kann wieder geschlossen oder offen sein. Sind nämlich die Direktricen beider Oberflächen geschlossene Polygone, und ist keine Lage der Erzeugenden der Pyramide parallel zur Erzeugenden des Prisma, so ist das Polygon, dessen Umfang die Durchdringungslinie beider Flächen ist, geschlossen; findet aber einer der beiden letzteren Fälle nicht statt, so ist dasselbe offen. —

Anmerk. 3. Legt man durch die horizontale Spur der durch das Centrum der Pyramide parallel zur Erzeugenden des Prisma gezogenen Geraden die horizontalen Spuren der Hülfsebenen, welche die äussersten Punkte der horizontalen Spur einer der beiden Oberflächen enthält, und es schneiden diese beiden Geraden noch die horizontale Spur der anderen Fläche, so durchdringen sich beide Flächen nach zwei Linien, von welchen die eine die Eintrittslinie, die andere die Austrittslinie beider Flächen ist. Schneidet aber nur die eine der horizontalen Spuren von den durch die äussersten Punkte einer horizontalen Spur der Flächen gezogenen

Hülfsebenen die andere Spur der Fläche, die andere aber nicht, so haben die beiden Oberflächen bloss eine einzige Durchdringungslinie.

§. 189.

Beispiel. (Fig. 127.) Es sei ABCDEF die horizontale Spur einer Pyramide, S sei die horizontale und S' die vertikale Projektion ihres Scheitels, ferner sei $A_1B_1C_1D_1$ die horizontale Spur eines Prisma, und G, G' seine die Projektionen der Erzeugenden des letzteren. Nach §. 70. wird die vertikale Projektion von ABCDEF in X sein müssen, und man erhält also (§. 65.) die vertikalen Projektionen 'A, 'B, 'C etc. etc. der einzelnen Scheitel dieses Sechseckes, wenn man A'A, B'B, C'C etc. etc. senkrecht auf X zieht. Ebenso wird die vertikale Projektion von $A_1B_1C_1D_1$ in X liegen müssen, und zwar (§§. 65. und 70.) durch die auf X gezogenen Senkrechten $A_1'A_1$, B_1B_1', C_1C_1', D_1D_1' bestimmt, und in A_1', B_1', C_1' und D_1' sein. Zieht man nun die Geraden SA und S'A', SB und S'B', SC und S'C' etc. etc., so erhält man die einzelnen Kanten der angegebenen Pyramide, und es stellt mithin (§. 180.) SABCDEF die horizontale und S'A'B'C'D'E'F' die vertikale Projektion dieser Pyramide dar. Zieht man ferner durch A_1, B_1, C_1 und D_1 Gerade parallel zu G' und durch $'A_1$, $'B_1$, $'C_1$ und $'D_1$ Gerade parallel mit 'G, so erhält man (§. 168.) in $A_1B_1C_1D_1E_1F_1H_1$ die horizontale und in $'A_1'B_1'C_1D_1'F_1'H_1'$ die vertikale Projektion des angegebenen Prisma. Um nun die Durchdringungslinie dieser beiden Oberflächen anzugeben, ziehe man (§. 188.) $S's_1$, parallel mit G' und Ss_1 parallel zu G, ziehe $s_1's_1$ senkrecht auf X, so wird (§. 93.) in s_1 die horizontale Spur der durch den Scheitel der Pyramide gehenden und mit der Erzeugenden des Prisma parallelen Geraden sein. Zieht man nun s_1c, so wird diese als horizontale Spur einer Ebene betrachtet werden können, die durch den Scheitel der Pyramide geht, und parallel zur Erzeugenden des Prisma ist. Nun schneidet diese Gerade die horizontale Spur des Prisma in k und l, folglich werden die durch k und l mit G parallel gezogenen Geraden kc und lc, die horizontalen und durch k' und l' und 'lc' parallel zu 'G gezogenen Geraden k'c' und l'c', die vertikalen Projektionen der zwei Erzeugenden sein (§. 170.), nach welchen die Hülfsebene, deren horizontale Spur s_1C ist, das Prisma schneidet. Von dieser Ebene wird aber die angegebene Pyramide nach der Kante (CS, C'S') geschnitten (§. 179.) folglich muss diese Kante die Geraden (kc, k'c') und (lc_1, $l'c_1'$) schneiden, und zwar wird die erstere im Punkte cc', letztere im Punkte c_1c_1' geschnitten, und es sind mithin c und c_1 die horizontalen, ferner c' und c_1' die vertikalen Projektionen zweier Punkte, die sich auf beiden Flächen befinden. Der Punkt c_1, c_1' wird sichtbar sein, weil auch die Geraden (lc_1, $'lc_1'$) und (CS, C'S) sichtbar sind; der Punkt c_1c' aber wieder verdeckt liegen, weil er sich auf der Geraden (kc, k'c') befindet, die verdeckt ist. Nun ziehe man s_1F, so erhält man die horizontale Spur einer zweiten Hülfsebene, und diese schneidet das Prisma nach zwei Geraden, von welchen mf_1 und $m'f_1'$ die Projektionen der ersten und nf_1, $n'f_1'$ die Projektionen der zweiten sind; die Pyramide aber hat mit jener Hülfsebene die Kante (Ff_1, $'Ff_1'$) gemeinschaftlich, man erhält daher in f und f_1 die horizontalen, ferner in 'f und $'f_1$ die vertikalen Projektionen zweier Punkte, die beiden Oberflächen angehören, und von welchen (f, f') verdeckt, f_1f_1' sichtbar ist. Auf diese Weise das Verfahren fortgesetzt, und die Hülfsebenen sD, sE, sG, sA und sB benützt, so erhält man in abcdef die horizontale und in a'b'c'd'e'f' die vertikale Projektion der einen, ferner in $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ die horizontale und in $a_1'b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$ die vertikale Projektion der andern Linie, nach welchen sich die beiden angegebenen Flächen schneiden. Da die Hülfsebenen, die ihre horizontalen Spuren in s_1C und s_1F haben, noch beide Flächen zugleich schneiden, so haben wir auch zwei ganz getrennt von einander liegende Durchdringungslinien erhalten, weil sich beide Flächen vollkommen durchdringen. —

§. 190.

Aufgabe 49. Es sind zwei Pyramiden gegeben; man soll ihre gemeinschaftliche Durchdringungslinie angeben.

Auflösung. Wir wissen, dass die Durchdringungslinie der Oberflächen zweier Pyramiden der Ort aller jener Punkte ist, nach welchen einzelne Erzeugende einer Pyramide von einzelnen Erzeugenden der andern Pyramide getroffen werden. Da nun eine solche Erzeugende der einen Pyramide, welche eine Erzeugende der andern Pyramide treffen soll mit dieser in einer Ebene liegen muss, so werden wir einzelne und so viele Punkte der Durchdringungslinie, als wir zur Bestimmung ihrer Richtung nothwendig haben, angeben können, wenn wir beide Pyramiden durch Hülfsebenen schneiden, die mit den Pyramiden bloss Gerade gemeinschaftlich haben, diese Geraden angeben, und ihre Durshschnittspunkte projiciren. Nun ist uns ferner, und zwar aus §. 179. bekannt, dass wenn man durch den Scheitel einer Pyramide eine Ebene legt, welche die Oberfläche der Pyramide schneidet, zwei Lagen der geradlinigen Erzeugenden der letzteren als Durchschnitt

erhalten werden; ziehen wir daher vom Scheitel der einen Pyramide nach dem Scheitel der andern Pyramide eine Gerade, legen durch diese eine Ebene, welche jede der Pyramiden schneidet, und suchen (nach §. 179.) diese Durchschnittslinien, so erhalten wir aus den Durchschnitten derjenigen Lagen der Erzeugenden der einen Pyramide, welche mit denen der andern Pyramide in dieser Hülfsebene liegen, Punkte, die den Oberflächen beider Pyramiden gemeinschaftlich sind, und die mithin der gesuchten Durchdringungslinie angehören. Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man so viele Punkte der Durchdringungslinie angeben, dass man dieselbe ziehen kann. —

Anmerk. 1. Sind die horizontalen Spuren beider Pyramiden schon gegeben, so kann man die Geraden, nach welchen eine der Pyramiden von einer der Hülfsebenen geschnitten wird, bestimmen, wenn man die Punkte, in welchen die horizontale Spur der Pyramide von der horizontalen Spur der Hülfsebene getroffen wird, projicirt, durch dieselben sodann die Geraden zieht, welche durch das Centrum der Pyramide gehen, und diese Geraden werden sodann diejenigen Lagen der Erzeugenden von der Pyramide sein, nach welchen letztere von der Hülfsebene geschnitten wird. Da aber zur Bestimmung dieser Durchschnittslinien die vertikale Spur des Hülfsebene überflüssig war, so wird man auch in dieser Aufgabe bloss die horizontalen Spuren der Hülfsebenen benützen, um die Durchdringungslinie beider Pyramiden zu erhalten. —

Anmerk. 2. In Bezug auf diejenigen Theile der Durchdringungslinie der beiden pyramidalischen Oberflächen, welche verdeckt sind haben wir uns wieder an die Regel zu halten, dass jene Punkte dieser Linie sichtbar sein werden, welche den Durschnitten von sichtbaren Lagen der Erzeugenden beider Pyramiden angehören, jeder Punkt aber verdeckt sein wird, welcher der Durchschnitt zweier Erzeugenden ist, von welchen auch nur eine verdeckt ist.

Anmerk. 3. Ist jede der Direktricen von beiden Pyramiden ein geschlossenes Polygon, so wird die Durchdringungslinie beider pyramidalischen Oberflächen ein geschlossenes Polygon sein, wenn keine der in einer der Hülfsebenen liegenden Erzeugenden der einen Pyramide parallel mit einer in derselben Hülfsebene liegenden Erzeugenden der andern Pyramide ist. —

Anmerk. 4. Ob die Durchdringung der beiden pyramidalischen Oberflächen eine vollkommene ist oder nicht, ersieht man wieder durch das schon mehrmals angegebene Merkmal: wenn nämlich diejenigen zwei Hülfsebenen, welche durch die äussersten Scheitel der horizontalen Spur einer der Pyramiden gezogen werden, auch die horizontale Spur der andern Pyramide treffen, oder dieselbe noch schneiden, so haben wir eine vollkommene Durchdringung, und wir erhalten sodann zwei von einander ganz getrennte Durchdringungslinien; treffen aber jene zwei Hülfsebenen die horizontale Spur der andern Pyramide nicht, so haben wir eine unvollkommene oder theilweise Durchdringung, und in diesem letztern Falle haben wir bloss eine einzige Durchdringungslinie. — Dass die beiden Projektionen der Durchdringungslinie immer zugleich erhalten werden, ist von selbst klar, indem die Durchschnittspunkte der horizontalen Projektionen der Erzeugenden, welche in den Hülfsebenen liegen die horizontalen, und die Durchschnittspunkte der vertikalen Projektionen dieser Erzeugenden die vertikalen Projektionen von Punkten der Durchdringungslinie geben. —

§. 191.

Aufgabe 48. Auf der horizontalen Tafel steht ein rechteckiges Parallelepipedum, man soll die Ebene seiner Grundfläche, die in der horizontalen Tafel liegt, um ihre horizontale Spur drehen, bis sie einen angegebenen Winkel mit der horizontalen Tafel bildet, und die Projektionen des Parallelepipedum bestimmen.

Auflösung. (Fig. 128.) Es sei E die horizontale Spur der Ebene der Grundfläche des Parallelepipedum, diese Grundfläche sei $a_1 b_1 c_1 d_1$ und die Länge einer der Kanten sei $a_1 h_1 = b_1 g_1 = c_1 f_1$ etc. etc., ferner sei α_1 der Winkel, den die Ebene der Grundfläche mit der horizontalen Tafel bildet, so kann man, wenn es nothwendig wird, die vertikale Spur E dieser Ebene (nach §. 126.) bestimmen, indem man von dem beliebigen Punkte A aus auf X die Gerade AB senkrecht zieht, dann $< BAB_1$ gleich dem gegebenen macht, BB_1 senkrecht auf AB und BB' senkrecht auf X zieht, und $BB' = BB_1$ macht, so wird die Gerade B'S die vertikale Spur dieser Ebene sein. Man denke sich nun die Ebene der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$ um E so weit gedreht, bis sie mit der horizontalen Tafel den angegebenen Winkel bildet, so kann man die Projektionen dieser Figur, welche ihr angehören, wenn sie in ihrer neuen Lage sich befindet, nach §. 132. bestimmen, indem man $< NMd_2 = \alpha_1$ macht, ferner $a_1 m$, $b_1 n$, $c_1 p$ und $d_1 q$ senkrecht auf E zieht, $Ma_1 = a_1 m$, $Mb_2 = b_1 n$, $Mc_2 = c_1 p$ und $Md_2 = d_1 q$ macht, und $a_2 a'_2$, $b_2 b'_2$, $c_2 c'_2$, $d_2 d'_2$ senkrecht auf X fällt, so werden die Katheten Ma'_2, Mb'_2, Mc'_2 und Md'_2 die Entfernungen der horizontalen Projektionen der Punkte a_1, b_1, c_1 und d_1 von E, $a_2 a'_2$, $b_2 b'_2$, $c_2 c'_2$ und $d_2 d'_2$ aber werden die vertikalen Ordinaten dieser Punkte sein. Macht man daher $ma = Ma'_2$, $nb = Mb'_2$, $pc = Mc'_2$ und $qd = Md'_2$, zieht sodann die Geraden ab, bc, cd und da, so erhält man die horizontalen Projektionen der Figur $a_1 b_1 c_1 d_1$. Zieht

man nun a a′, b b′, c c′, und d d′ senkrecht auf X, und zieht die mit X parallelen Geraden $a_2 a'$, $b_2 b'$, $c_2 c'$ und $d_2 d'$, verbindet ferner a′ mit b′, b′ mit c′, c′ mit d′ und d′ mit a′ durch Gerade, so wird a′ b′ c′ d die vertikale Projektion der gegebenen Grundfläche des auf ihrer Ebene senkrechten Parallelepipedum sein. Um nun auch noch die übrigen Kanten und Seitenlinien von diesem Parallelepipedum anzugeben, müssen wir wenigstens die Projektionen einer dieser Kanten angeben. Wir wissen nun vor Allem, dass die Punkte (a, a′), (b, b′), (c, c′), und (d, d′) die Endpunkte der Kanten sind, so dass wir also von einer jeden bloss noch die Projektionen eines Punktes angeben dürfen, um dieselben projiciren zu können. Nun wissen wir ferner, dass jede Kante des Parallelepipedum senkrecht auf der Ebene seiner Grundfläche steht, daher sind auch die horizontalen Projektionen der Kanten (§. 84.) senkrecht auf E, und ihre vertikalen Projektionen senkrecht auf der vertikalen Spur der Ebene der Grundfläche. Es liegen mithin die horizontalen Projektionen der Seitenkanten in den Geraden $a_1 a$, $b_1 b$, $c_1 c$, $d_1 d$, ihre vertikalen Projektionen aber liegen in den Geraden, die man von den Punkten a′, b′, c′ und d′ senkrecht auf E zieht. Da nun jede dieser Kanten senkrecht auf Ebene ESE′ (nämlich auf der Ebene der Grundfläche $a_1 b_1 c_1 d_1$) steht, so bildet dieselbe mit der horizontalen Tafel gleich Winkel und zwar ist jeder dieser Winkel Complementswinkel zu demjenigen, den Ebene ESE′ mit der horizontalen Tafel bildet; folglich ist $\sphericalangle$ BB₁A gleich dem Winkel, den eine dieser Kanten mit der horizontalen Tafel bildet. Legen wir daher in k_1 an X den Winkel $l_1 k_1 l = \sphericalangle$ BB₁A, machen sodann $k_1 l_1 = a_1 b_1$, und ziehen $l_1 l$ senkrecht auf X, so wird (nach §. 88.) $k_1 l$ gleich der horizontalen Projektion einer dieser Kanten sein, denn diese Kanten haben, weil sie parallel und gleich sind (nach §. 78.) auch gleiche horizontale und gleiche vertikale Projektionen. Trägt man daher $k_1 l$ von a aus auf a m, und macht a h = k l, macht ferner b g = c f = d e = $k_1 l$, so erhält man die horizontalen Projektionen der einzelnen Kanten des Parallelepipedum, und zieht man die Geraden h g, g f, f e und e h, so wird a b c d e f g h die horizontale Projektion des Parallelepipedum sein. Nun ziehe man von den Punkten e, f, g, h aus Senkrechte auf X, und lasse diese einzeln von den auf E gezogenen Senkrechten d′ e′, c′ f′, b′ g′ und a′ h′ durchschneiden, ziehe sodann die Geraden k′ f′, f′ g′, g′ h′ und e′ h′, so wird a′ b′ c′ d′ e′ f′ g′ h′ die vertikale Projektion des gegebenen Parallelepipedum sein.

Anmerk. Es wurde vorhin erwähnt, dass jede an der Ebene der Grundfläche $a_1 b_1 c_1 d_1$ (Fig. 128.) senkrechte Kante des Parallelepipedum mit der horizontalen Tafel einen Winkel bildet, welcher den Winkel der Ebene ESE′ und der horizontalen Tafel, nämlich den $\sphericalangle \alpha_1$ zu 90° ergänzt, Obgleich diess sehr leicht einzusehen ist, so wollen wir diesen Satz doch näher betrachten, und ihn beweisen, Zieht man nämlich von einem beliebigen Punkte einer dieser Kanten auf die horizontale Tafel eine Senkrechte, so bildet diese Senkrechte mit jener Kante einen Winkel, welcher Supplementswinkel zum $\sphericalangle \alpha_1$ ist (nach §. 50.), und diese Senkrechte bildet mit der Verlängerung von jener Kante einen Winkel, welcher (nach §. 136.) der Complementswinkel desjenigen Winkels ist, den die Kante mit der horizontalen Tafel bildet. Nennen wir daher diesen letzteren β, so wissen wir, dass $90 - \beta + 180 - \alpha_1 = 180$, daher ist $\beta = 90 - \alpha_1$, d. h. der Winkel, welchen eine Kante des gegebenen Parallelepipedum mit der horizontalen Tafel bildet, ist Complementswinkel desjenigen, den die Ebene von $a_1 b_1 c_1 d_1$ mit der horizontalen Tafel bildet.

§. 192.

Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir die regelmässigen Körper erwähnen, die gewöhnlich in den Lehrbüchern der Geometrie vorkommen. Regelmässig wird ein Polyeder genannt, wenn alle einzelnen Figuren, welche den Körper begränzen regelmässig und unter sich kongruent sind. Nun sollen die einzelnen regelmässigen Polyeder, welche lauter ausspringende Winkel haben, aufgezählt werden.

1. Regelmässige Polyeder aus regelmässigen Dreiecken.

a. Legt man drei regelmässige Dreiecke so an einander, dass sie einen Scheitel, und je zwei auf einander folgende eine Seite gemeinschaftlich haben, so wird ein körperliches Eck gebildet, und die Grundlinien dieser drei regelmässigen Dreiecke bilden (weil die Dreiecke kongruent sind) ein diesem letzteren kongruentes regelmässiges Dreieck, so dass also der ganze körperliche Raum von vier regelmässigen und unter sich gleichen Dreiecken begränzt wird. Man nennt diesen Körper ein regelmässiges Tetraeder oder ein Tetraeder.

b. Legt man vier regelmässige und unter sich kongruente Dreiecke so an einander, dass sie einen Körperwinkel bilden (was nach §. 56. geschehen kann), so werden diejenigen Seiten derselben, welche nach der offenen Seite zugekehrt sind, ein regelmässiges Viereck bilden, welches die Grundfläche einer Pyramide mit regelmässigen Dreiecken als Seitenflächen ist. Dass die Seiten dieser Dreiecke ein Quadrat bilden, ist leicht einzusehen. Es ist

nämlich dieses Viereck vor Allem ein Rhombus, also auch ein ebenes Viereck. Da nun alle Kanten dieser Pyramide einander gleich sind, so werden auch (§. 19.) die Scheitel jenes Viereckes in einem Kreisumfange liegen, dessen Mittelpunkt der Fuss der vom Scheitel des zuerst gebildeten körperlichen Eckes auf die Ebene des Viereckes gezogenen Senkrechten ist; daher ist auch dieses Viereck als ein in einem Kreise eingeschriebenes, das gleiche Seiten hat, ein regelmässiges. Errichtet man über dieses Quadrat wieder eine Pyramide, deren Seitenflächen regelmässige und mit den vorigen kongruente Dreiecke sind, so bilden diese beiden Pyramiden einen aus lauter regelmässigen und unter sich kongruenten Dreiecken begränzten Körper, von welchem jeder Körperwinkel aus vier Winkeln der regelmässigen Dreiecke gebildet wird. Dieser Körper ist nun nach der am Eingange dieses §. gegebenen Erklärung regelmässig, und wird ein Oktaeder genannt.

c. Aus §. 56. ist bekannt, dass man fünf regelmässige Dreiecke in einem Punkte so zusammenstossen lassen kann, dass sie einen körperlichen Winkel bilden; legt man daher fünf regelmässige und unter sich kongruente Dreiecke so aneinander, dass sie einen Scheitel und je zwei auf einander folgende eine Seite gemeinschaftlich haben, so wird hierdurch ein körperliches Eck aus fünf Linienwinkeln gebildet, von welchem jeder 60° enthält. Betrachtet man nun die unteren Scheitel dieser Dreiecke, so stossen in jedem derselben zwei von diesen Dreiecken zusammen, und es können also noch drei angelegt werden, damit man ein körperliches Eck erhält, wie das gegebene. Da nun fünf solche Scheitel vorhanden sind, von welchen jeder der Scheitel eines körperlichen Eckes von fünf Linienwinkeln wird, wenn man noch drei regelmässige Dreiecke anlegt, so werden ausser den angegebenen fünf regelmässigen Dreiecken noch fünfzehn nothwendig sein, um den ganzen körperlichen Raum zu schliessen. Es entsteht also ein Körper, der von zwanzig regelmässigen Dreiecken begränzt wird, folglich ist dieser Körper regelmässig; man nennt denselben Ikosaeder.

2. Regelmässige Polyeder, die von Quadraten begränzt werden, kann man bloss eines bilden, und zwar das, von welchem in jedem Körperwinkel drei Quadrate zusammenstossen, wie diess in §. 56. erwähnt wurde. Errichtet man nämlich über ein Quadrat ein rechteckiges Parallelepipedum, dessen Höhe gleich der Seite des Quadrates ist, so erhält man den einzigen von regelmässigen Vierecken begränzten Körper, der also regelmässig ist. Man nennt denselben, wie schon in §. 163. erwähnt wurde: Hexaeder oder Cubus.

3. Von regelmässigen Fünfecken kann man (§. 56.) noch einen regelmässigen Körper begränzen. Lässt man nämlich drei regelmässige Fünfecke, die kongruent sind so aneinander stossen, dass sie einen Scheitel und je aufeinander folgende derselben eine Seite gemeinschaftlich haben, so erhält man noch ein körperliches Eck, weil jeder Winkel des regelmässigen Fünfeckes 108 Grad enthält, also drei solche nur erst 324° ausmachen. Begränzt man nun den körperlichen Raum dadurch, dass man an die untern Seiten jeder dieser drei regelmässigen Fünfecke solche anlegt, die kongruent sind, und von welchen immer drei einen körperlichen Winkel bilden, so erhält man ein regelmässiges Polyeder welches Pentagondodekaeder genannt wird.

Sechstes Kapitel.

Principien der isometrischen Projektionslehre.

§. 193.

Um die Principien der isometrischen Projektionslehre zu entwickeln, wollen wir vor Allem einen Würfel, der seine Grundfläche in der horizontalen Tafel hat, so drehen, dass ein Scheitel desselben in der horizontalen Tafel bleibt, seine einzelnen Kanten aber in Ebenen bleiben, die parallel zur vertikalen und senkrecht auf der horizontalen Tafel sind. Nimmt man nun die Grundfläche des Würfels in der horizontalen Tafel so an, dass die durch zwei Kanten gelegte Diagonalebene parallel zur vertikalen Tafel ist, so wird die äussere Begränzung seiner horizontalen Projektion ein Sechseck, und wenn man den Würfel so weit dreht, bis die körperliche Diagonale desselben, welche durch den in der horizontalen Tafel bleibenden Punkt geht, senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so steht die horizontale Projektion des Würfels in dieser neuen Lage in einem bestimmten Zusammenhange mit dem Würfel selbst, der hier dargethan werden soll.

(Fig. 129.) Es sei ABCDEFG ein Würfel, von welchem der Scheitel B in der horizontalen

Tafel liegt und AB eine körperliche Diagonale desselben, die senkrecht auf dieser Tafel steht, so projicire man die einzelnen Scheitel desselben horizontal, indem man die Geraden Cc, Dd, Ee, Ff, Gg und Hh senkrecht auf die horizontale Tafel zieht, und die Projektionen dieser Punkte C, D, E etc. etc. durch c, d, e etc. etc. bezeichnet. Verbindet man nun diese letzteren Punkte durch Gerade, unter sich und mit dem Punkte B, so erhält man die horizontale Projektion efghcd der unteren drei in dem Punkte B zusammenstossenden Seitenflächen des Würfels. Zieht man die Diagonalen AC, AE und AG, so hat man AC = AE = AG als Diagonalen gleicher Quadrate, CG = BE = BG als Seiten dieser letzteren und AB für die drei Dreiecke, deren Seiten die vorher genannten Linien sind, gemeinschaftlich, folglich wird

$$\triangle ABC \cong \triangle ABE \cong \triangle ABG,$$

und mithin auch

1. $< ABC = < ABE = < ABG$, d. h. die Winkel, welche die körperliche Diagonale AB mit den drei Kanten BC, BE und BG bildet, sind unter sich gleich. Legt man nun durch AB und BC eine Ebene, so wird diese (§. 45.) senkrecht auf der horizontalen Tafel sein, und mithin (§. 71.) die horizontal projicirende Ebene von BC sein, so dass also die horizontale Projektion von BC, nämlich Bc in der durch AB und BC gelegten Ebene sich befindet. Da nun die Geraden AB, BC und Bc in dieser letzteren Ebene liegen, und nach der Voraussetzung AB senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so muss $< ABC + < CBc = 90°$ sein. Legt man nun ebenso durch AB und BE eine Ebene, so wird diese die horizontal projicirende Ebene von BE sein, also Bc enthalten und daher muss $< ABE + < BEc = 90°$ sein. Auf gleiche Weise kann gezeigt werden, dass $< ABG + < BGg = 90°$ sein muss, daher ist auch $< ABC + < CBc = < ABE + < EBc = < ABG + < GBg$, und da $< ABC = < ABE = < ABG$ ist, so muss auch
2. $< CBc = < EBe = < GBg$ sein.

   Nun ist ausserdem noch $BC = BE = BG$, daher ist $\triangle BCc \cong \triangle BEe \cong \triangle BGg$, woraus also folgt, dass
3. $Bc = Be = Bg$

   sein muss, d. h. die horizontalen Projektionen der drei durch den Punkt B gehenden Würfelkanten müssen einander gleich sein. Nun wissen wir, dass $CH \neq BG$, $BC \neq DE$, und $BC \neq HG$, ferner $BE \neq CD$ ist, folglich müssen auch (§. 76.) die horizontalen Projektionen der Geraden CH, HG, DE und CD einzeln parallel sein mit den horizontalen Projektionen der Geraden BG, BC und BE, oder es muss

   $ch \neq Bg$, $hg \neq Bc \neq de$, $cd \neq Be$ sein, und aus gleichem Grunde muss $ef \neq Bg$ und $fg \neq Be$ sein. Da nun parallele Gerade, die gleich sind, auch (§. 78.) unter sich gleiche Projektionen haben, so ist auch

   $fg = Be$, $ef = Bg$, $hg = Bc$, $hc = Bg$, $cd = Be$ und $de = Bc$, und da $Bc = Bg = Be$ war, so hat man endlich

   $de = ef = fg = gh = hc = cd = Be$ etc. etc. daher sind
4. die horizontalen Projektionen der in dem Punkte B zusammenstossenden drei Seitenflächen des Würfels unter sich gleiche Rhomben.

   Nun ist $Bg = Bc = Be$ (nach dem, was schon oben bewiesen wurde), und da $< GgB = < BcC = < EeB = R$ ist, so hat man $\triangle BGg \cong \triangle BCc \cong \triangle BEe$, und daher $Gg = Cc = Ee$.

   Da nun $Cc =$ und $\neq Gg$ ist, so hat man $CG =$ und $\neq cg$, und da ferner $Cc \neq$ und $= Ec$ ist, so wird $BE =$ und $\neq ce$, und endlich ist $EG =$ und $\neq eg$. Man hat daher

   $\triangle eBg \cong \triangle eBc \cong \triangle cBg$, folglich
5. $< cBg = < cBg = < cBe = \frac{360°}{3} = 120°$.

   Nun fallen die horizontalen Projektionen der oberen Kanten theils mit den horizontalen Projektionen der unteren, theils mit den Verlängerungen dieser Kanten zusammen, und daher fallen auch die horizontalen Projektionen der oberen drei Seitenflächen mit denen der unteren drei zusammen, und es stellt mithin die Figur Bcdefghc die horizontale Projektion desjenigen Würfels vor, dessen einer Scheitel B in der horizontalen Tafel liegt, und von welchem die durch B gehende körperliche Diagonale senkrecht auf dieser Projektionstafel steht. Nimmt man nun die in (3), (4) und (5) bewiesenen Sätze zusammen, und erwägt noch, dass $\triangle efg \cong \triangle ghc \cong \triangle edc$, also
6. $ed = dc = ch = hg = gf = fe = eB$ etc. etc. ist, so kann man für die horizontale Projektion eines Würfels, dessen körperliche Diagonale senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, folgende Sätze aussprechen:

1. Die horizontale Projektion dieses Würfels hat als äussere Begränzun

ein regelmässiges Sechseck, dessen Mittelpunkt der auf der horizontalen Tafel sich befindende Scheitel des Würfels ist.

2. Die horizontalen Projektionen der drei durch den Endpunkt der körperlichen Diagonale gehenden Kanten sind einander gleich und zwar gleich der horizontalen Projektion einer jeden der übrigen Kanten, und bilden unter einander Winkel von 120°. —

3. Die horizontalen Projektionen der einzelnen Seitenflächen sind Rhomben, von welchen jedes einen Winkel von 120°, und einen von 60° hat.

§. 194.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, dass wenn die horizontale Projektion einer Kante eines Würfels, dessen körperliche Diagonale senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, bekannt wäre, die horizontale Projektion des Würfels leicht konstruirt werden könnte, wenn man in der horizontalen Projektion jener Diagonale drei Gerade so anlegen würde, dass immer zwei auf einander folgende derselben, Winkel von 120° bilden, jede derselben so gross als die horizontale Projektion einer Würfelkante machen würde, und nun über jede einen Rhombus konstruirt, von welchem jeder von zwei gegenüberstehenden Winkel 120° und jeder der beiden andern 60° beträgt. Man würde dadurch die horizontalen Projektionen der einze Seitenflächen des Würfels und mithin seine horizontale Projektion erhalten. Nun wird aber die im vorstehenden Paragraphe gemachte Untersuchung nicht darauf angewendet, die horizontale Projektion dieses Würfels zu bestimmen, dessen körperliche Diagonale senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, sondern man konstruirt die horizontale Projektion eines neuen Würfels, der gegen die horizontale Tafel eben so liegt, wie der vorige, und von welchem die horizontale Projektion einer jeden Kante gleich der Seite des gegebenen Würfels ist, und nennt diese horizontale Projektion des neuen Würfels die isometrische Projektion des gegebenen. Die drei durch den in der horizontalen Tafel angenommenen Scheitel des Würfels gehenden Kanten nennt man die isometrischen Hauptaxen oder Axen, während alle mit diesen Axen parallel gezogenen Geraden isometrische Linien genannt werden. Die durch je zwei der Axen gelegten Ebenen sind die isometrischen Hauptebenen, eine Ebene aber, die durch zwei isometrische Linien gelegt wird, heisst isometrische Ebene. —

Kennt man also die isometrischen Axen, so kann man daraus die isometrische Projektion des Würfels angeben, und aus den isometrischen Linien eines Punktes kann letzterer angegeben werden. —

Anmerk. Das, was hier von Würfeln nachgewiesen wurde, kann leicht auf ein rechtwinkliges Parallelepipedum angewendet werden, wenn man sich in letzterem einen Würfel denkt, dessen Kanten in einzelnen Kanten des ersteren liegen, diesen um einen Scheitel so dreht, dass die durch diesen Scheitel gehende körperliche Diagonale senkrecht auf der horizontalen Tafel steht, so wird die horizontale Projektion des Parallelepipedum eine leicht zu konstruirende Figur sein. Wenn man die horizontale Projektion eines neuen Parallelepipedum konstruirt, welches so beschaffen ist, dass die horizontale Projektion der einzelnen Kanten desselben gleich den Kanten des gegebenen Parallelepipedum werden, so wird die horizontale Projektion dieses neuen Parallelepipedum die isometrische Projektion des gegebenen genannt.

§. 195.

Aufgabe 51. Es ist eine Kante eines Würfels gegeben, man soll seine isometrische Projektion bestimmen.

Auflösung. (Fig. 130.) Es sei abcd die horizontale, a′c′e′f die vertikale Projektion eines Würfels, dessen isometrische Projektion man bestimmen soll. Man nehme (Fig. 130. a.) einen beliebigen Punkt C an, welcher der Fuss der durch den Punkt (c, c′) gehenden körperlichen Diagonalen (in Fig. 130.) sein soll, beschreibe aus C mit einem Halbmesser, der gleich ab ist, einen Kreis, und trage CD = ab auf die Peripherie dieses Kreises, so wird ∠ BCE = ∠ DCE etc. etc. = 60° sein. Zieht man daher BC, CG und CE, so wird ∠ BCG = ∠ BCD = ∠ GCD = 120° sein, und die drei Geraden BC, CG und CD sind die isometrischen Axen. Construirt man nun die Rhomben BCGAB, CDE und ECFD, so werden diese die isometrischen Projektionen der unteren drei Seitenflächen des Würfels sein. Da nun CB, CA und CF die isometrische Projektion der durch den Anfangspunkt der körperlichen Diagonale gehenden Würfelkanten sind, so werden die Rhomben ACEB, CDEF und FCAG die oberen drei Seitenflächen des Würfels sein, und mithin ist ABDEFGC die verlangte isometrische Projektion des in Fig. 130. angegebenen Würfels.

Anmerk. Es ist in Fig. 130. der Würfel (a b c d, a′b′c′e′g′k) so gedreht worden, dass die durch die Ge-

raden (a, ma′) und (c, nc′) gelegte Ebene parallel geblieben ist mit der vertikalen Tafel, und der Punkt, dessen horizontale Projektion c und dessen vertikale Projektion in c′ ist, in der horizontalen Tafel blieb. —

§. 196.

Aufgabe 52. Man soll die isometrische Projektion eines rechtwinkligen Parallelepipedum angeben, dessen Grundfläche ein Quadrat ist.

Auflösung. (Fig. 130.) Es sei abcd die Grundfläche, also auch die horizontale Projektion des Parallelepipedum, 'a 'b 'c 'k 'l seine vertikale Projektion, so schneide man in einer solchen Entfernung von der Grundfläche durch eine Ebene das Parallelepipedum ab, dass der zwischen dieser Ebene und der horizontalen Tafel liegende Theil desselben ein Würfel wird. Denkt man sich nun diesen Würfel so gedreht, dass der Scheitel c fix liegen bleibt, die durch c gehende körperliche Diagonale des Würfels aber senkrecht auf der horizontalen Tafel zu stehen kömmt, und projicirt in dieser Stellung sowohl den Würfel, als auch das Parallelepipedum, so muss die horizontale Projektion jeder Kante des Würfels mit der horizontalen Projektion derjenigen Kante des Parallelepipedum, von welcher sie ein Theil ist, in demselben Verhältnisse stehen, in welchem diese Kanten selbst unter einander stehen. (Fig. 130. b.) Denn ist CA die Länge einer Kante des Würfels, Ca ihre horizontale Projektion, CB die Länge einer Kante des Parallelepipedum, dessen horizontale Projektion Cb ist, so wissen wir, dass CB und CA auf der Geraden CB liegen. Projiciren wir daher CB und CA horizontal, so liegen diese Projektionen Ca und Cb mit CA und CB in einem rechtwinkligen Dreiecke CBb, in welchem die horizontal-projicirenden Linien Bb und Aa der Punkte B und A parallel sein müssen, folglich wird

$$CA : CB = Ca : Cb \text{ sein.}$$

Nehmen wir daher ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit quadratischer Grundfläche an, von welchem die horizontale Projektion einer Kante gleich CA ist, so wird die horizontale Projektion einer Kante des Würfels von derselben Grundfläche gleich CB sein, wenn CB die Seite der Grundfläche war, und hierauf beruht das Verfahren die isometrische Projektion eines senkrechten Parallelepipedum mit quadratischer Grundfläche zu bestimmen. Man suche nämlich (Fig. 130. a.) die isometrische Projektion des Würfels mit derselben Grundfläche, verlängere die Kanten EB, CA, FG, und mache jede derselben gleich der Höhe des Parallelepipedum, ziehe MK, KH, HN und NM, so wird CEDFHKME die isometrische Projektion des Parallelepipedum sein, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, von welchem eine Seite gleich CD, und dessen Höhe gleich CK ist. Die isometrischen Projektionen der einzelnen Seitenflächen dieses Parallelepipedum sind leicht aus Fig. 130. a. zu ersehen. —

§. 197.

Aufgabe 53. Es ist ein senkrechtes Parallelepipedum angegeben, dessen Grundfläche ein Rechteck ist; man soll die isometrische Projektion von diesem Parallelepipedum angeben.

Auflösung. Denkt man sich in diesem Parallelepipedum einen Würfel, von welchem drei seiner Kanten in dreien Kanten des ersteren liegen, von diesem sodann (nach §. 195,) die isometrische Projektion bestimmt, auf seine isometrische Axen sowohl, als auch auf seine isometrische Linien die entsprechenden Kanten des Parallelepipedum getragen, und die Endpunkte dieser aufgetragenen Linien in gehöriger Ordnung durch Gerade verbunden, so wird man die isometrische Projektion des gegebenen Parallelepipedum erhalten, oder die horizontale Projektion desjenigen, von welchem die horizontalen Projektionen der einzelnen Kanten gleich den Kanten des gegebenen sind. — (Fig. 133.) Es sei nun ABCD ein in der horizontalen Tafel liegendes Rechteck, welches die Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedum sein soll, von welchem 'AB′F′E′ die vertikale Projektion ist; man soll die isometrische Projektion von diesem Parallelepipedum angeben. Beschreibt man aus dem beliebig angenommenen Punkte C_1 mit einem Halbmesser C_1B_1, welcher gleich CB ist, einen Kreis, macht $B_1b = ba = B_1C_1$ und zieht C_1a, so erhält man eine durch C_1 gehende Seitenfläche des Würfels, von welchem die durch C_1 gehenden Kanten auf drei Kanten des gegebenen Parallelepipedum liegen. Man mache daher $C_1D_1 = BA$, konstruire das Parallelogramm $A_1B_1C_1D_1$, so erhält man die isometrische Projektion der Grundfläche ABCD. Zieht man nun C_1c so, dass $< aC_1c = 120°$ wird, so ist cC_1 die dritte isometrische Hauptaxe des durch C_1 gehenden Würfels, von welchem jede Kante gleich C_1B_1 ist. Macht man daher $C_1G_1 = B'F'$ gleich der Höhe des angegebenen Parallelepipedum, und konstruirt die Parallelogramme $D_1C_1G_1H_1$ und $B_1C_1G_1F_1$, so erhält man die isometrischen Projektionen zweier Seitenflächen des Parallelepipedum. Zieht man nun $A_1E_1 \neq$ und $= D_1H_1 \neq$ und $= C_1G_1$, und konstruirt die Seitenflächen $A_1C_1H_1D_1$, $A_1B_1F_1E_1$, so wird $A_1B_1C_1D_1E_1H_1G_1F_1$ die

isometrische Projektion des angegebenen Parallelepipedum sein. —

Anmerk. 1. Aus der in diesem Paragraphe gemachten Construktion lässt sich leicht ersehen, wie man die isometrische Projektion eines Rechteckes bestimmen kann. (Fig. 131.) Ist nämlihh A B C D ein gegebenes Rechteck, so beschreibe man über A B das Quadrat A B b a, ziehe aus A_1 mit dem Halbmesser $A_1 B_1 = AB$ einen Kreisbogen, ziehe $A_1 b_1 = b_1 a_1 = A_1 B_1$, und verbinde A_1 mit a_1 durch die Gerade $A_1 a_1$, so wird $A_1 B_1 b_1 a_1$ die isometrische Projektion des Quadrates A B b a sein. Verlängert man nun $A_1 a_1$ und macht $A_1 D_1 = AD$, verlängert ferner $B_1 b_1$ und macht $B_1 C_1 = BC$, zieht sodann $C_1 D_1$, so wird $A_1 B_1 C_1 D_1$ die isometrische Projektion des Rechteckes A B C D sein.

Anmerk. 2. (Fig. 132.) Soll die isometrische Projektion des Parallelogrammes A B C D bestimmt werden, so umgebe man dasselbe durch das Rechteck B a D b, dessen Seiten die Scheitel des gegebenen Parallelogrammes enthalten. Construirt man nun nach Anmerk. 1. die isometrische Projektion $B_1 a_1 D_1 b_1$ des Rechteckes B a D b, macht ferner $B_1 A_1 = BA$, $D_1 C_1 = DC$, zieht sodann $B_1 C_1$ und $A_1 D_1$, so wird $A_1 B_1 C_1 D_1$ die isometrische Projektion des Parallelogrammes A B C D sein.

Anmerk. 3. Es könnte hier die Frage entstehen, wie man von der isometrischen Projektion eines Rechteckes oder eines Parallelogrammes sprechen kann; allein diese Frage lässt sich leicht beantworten. Man hat sich nämlich nur dieses Rechteck oder Parallelogramm von einem Quadrate so umgeben zu denken, dass die Seiten dieses Quadrates die Scheitel jenes Parallelogrammes enthalten, über dieses Quadrat muss man sich sodann einen Würfel beschrieben denken, und diesen isometrisch projiciren, so werden hierdurch auch seine einzelnen Seitenflächen isometrisch projicirt, und folglich auch jeder Punkt, der auf einer Seite der letzteren liegt. Bestimmt man daher die isometrische Projektion des angenommenen Quadrates, und gibt auf seinen Seiten jene Punkte an, welche den Scheiteln des gegebenen Parallelogrammes entsprechen, so wird durch Verbindung dieser Punkte vermittelst Gerade ein Parallelogramm erhalten, das die isometrische Projektion des gegebenen genannt wird. Ebenso kann man auch von der isometrischen Projektion irgend einer ebenen Figur sprechen. —

§. 198.

Aufgabe 54. Ein senkrechtes Parallelepipedum ist gegeben, dessen Grundfläche ein beliebiges Parallelogramm ist, man soll seine isometrische Projektion angeben.

Auflösung. Construirt man die isometrische Projektion seiner Grundfläche (nach Anmerk. 2. des vor. §.), beschreibt über die erste Seite dieser isometrischen Projektion ein Parallelogramm, dessen zweite Seite gleich der Höhe des gegebenen Parallelepipedum ist, und beschreibt so über jede der Seiten der isometrischen Projektion der Grundfläche ein Parallelogram, so erhält man die Seitenflächen sowohl, als auch die isometrische Projektion des angegebenen Parallelepipedum.

§. 199.

Aufgabe 55. Die isometrische Projektion eines senkrechten Prisma von beliebiger Grundfläche anzugeben.

Auflösung. Man denke sich um dasselbe ein rechteckiges Parallelepipedum beschrieben, dessen Seitenflächen einzelne Kanten des gegebenen, von welchem ferner die Seiten jener Grundfläche einzelne Scheitel der Grundfläche des gegebenen Prisma enthalten, und in welchem die Seiten der Grundfläche von den Seiten der Grundfläche des gegebenen getroffen werden. Sodann konsruire man die isometrische Projektion dieses rechtwinkligen Parallelepipedum, bestimme durch die Seiten der isometrischen Projektion seiner Grundfläche die Punkte, die der Grundfläche des gegebenen Prisma angehören, und verbinde diese in gehöriger Ordnung durch Gerade, so erhält man die isometrische Projektion der Grundfläche dieses Prisma. Durch die einzelnen Scheitel dieser Grundfläche parallele Gerade mit der dritten isometrischen Hauptaxe gezogen, jede dieser Parallelen gleich der Höhe des Prisma gemacht, und die Endpunkte dieser isometrischen Linien durch Gerade verbunden, so erhält man die verlangte isometrische Projektion des Prisma. —

Anmerk. 1. Um alle Weitläufigkeiten möglichst zu vermeiden wollen wir folgende Betrachtungen machen. Wir wissen nämlich, dass

1. die äussere Begränzung der isometrischen Projektion eines Würfels (Fig. 130. a.) ein regelmässiges Sechseck ist, dessen Seite gleich der Seite des Würfels ist.
2. Die isometrische Projektion seiner Grundfläche ein Rhombus sein muss, von welchem zwei Seiten einen Winkel von 120° und die andern zwei einen Winkel von 60° bilden.
3. die isometrischen Projektionen der übrigen Kanten mit den Seiten dieses Rhombus theils Winkel von 120°, theils Winkel von 60° bilden.

Soll daher die isometrische Projektion irgend eines Punktes der Grundfläche, z. B. die des Punktes D (Fig. 130.) angegeben werden, so werden wir seinen wirklichen Abstand D F von der Geraden C J auf C E (Fig. 130. a) tragen, so dass C E (Fig. 130. a.) = F D (Fig. 130.) wird, sodann seinen Abstand D E (Fig. 130.) auf C F (Fig. 130. a.) so tragen, dass C F (Fig. 130. a.) = D E (Fig. 130.) wird, sodann (Fig. 130. a.) F D ∥ C E, und E D_1 ∥ C E ziehen, so wird in D die isometrische Projektion des in Fig. 130. angegebenen Punktes D sein. Bezeichnen wir nun der Kürze halber die Axe C E durch X, ferner die isometrische Axe C F durch Y, so wird man die

isometrische Projektion eines in der Ebene YZ angegebenen Punktes bestimmen können, wenn man die Axe X an die Axe Z unter dem Winkel 120° anlegt, auf X vom Anfangspunkte (dem Durchschnittspunkte beider Axen) aus die Entfernung des gegebenen Punktes von Y, und auf Y vom Anfangspunkte aus die Entfernung dieses Punktes von X trägt, von den Endpunkten dieser aufgetragenen Entfernungen aus isometrische Linien zieht, so wird der Durchschnitt der letzteren die isometrische Projektion des in der Ebene XY angenommenen Punktes sein. Wir können füglich die Geraden DE und DE die isometrischen Coordinaten des Punktes D nennen, und werden also aus den isometrischen Coordinaten, welche gleich den rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes sind, die isometrische Projektion eines in einer Ebene angegebenen Punktes leicht bestimmen können.

Anmerk. 2. Betrachtet man die isometrische Projektion eines auf der Oberfläche des Würfels angegebenen Punktes, z. B. die des Punktes B (Fig. 130.), die in B (Fig. 130. a.) ist, so ist E (Fig. 130. a.) die isometrische Projektion der horizontalen Projektion des Punktes B, und BE ist gleich der vertikalen Ordinate dieses Punktes, welche parallel mit der dritten isometrischen Axe CA geht. Bezeichnen wir daher die isometrische Axe CA durch Z, so können wir sagen: die isometrische Projektion irgend eines im Raume angegebenen Punktes wird erhalten, wenn man (Anmerk. 1. dieses §.) die isometrische Projektion der horizontalen Projektion dieses Punktes bestimmt, sodann durch diese eine Gerade parallel zur isometrischen Axe Z zieht, und diese isometrische Linie gleich der vertikalen Ordinate des Punktes macht.

Anmerk. 3. Soll daher die isometrische Projektion irgend einer ebenen Figur angegeben werden, so ziehe man durch den Scheitel derselben, um welchen das Polygon gedreht wird, ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und ziehe von den übrigen Scheiteln der Figur aus Senkrechte auf die Coordinatenaxen, wodurch man die rechtwinkligen Coordinaten dieser einzelnen Punkte erhält. Nun ziehe man durch einen beliebigen Punkt zwei Gerade, welche unter einem Winkel von 120° gegen einander geneigt sind, so werden diese die isometrischen Axen X und Y sein. Auf die Axe der X trage man vom Anfangspunkte aus die rechtwinkligen Abstände der einzelnen Scheitel der gegebenen Figur von der Axe Y, und auf die Axe Y trage man vom Anfangspunkte aus die Abstände der einzelnen Scheitel der Figur von der Axe X, ziehe sodann durch die auf den Axen X und Y erhaltenen Punkte isometrische Linien, so wird im Durchschnitte der isometrischen Linien eines und desselben Punktes auch die isometrische Projektion des letzteren erhalten werden. Die isometrischen Projektionen dieser einzelnen Punkte durch Gerade verbunden, so erhält man die isometrische Projektion der angegebenen ebenen Figur. —

Anmerk. 4. Um endlich die isometrische Projektionen irgend eines Polyeders zu bestimmen, so bestimme man die isometrische Projektion seiner Grundfläche, oder einer seiner Seitenflächen. Nun ziehe man auf die Grundfläche von allen übrigen Scheiteln aus Senkrechte, und bestimmen zuerst (nach Anmerk. 1. dieses §.) die isometrischen Projektionen der Fusspunkte dieser Senkrechten, sodann gebe man (nach Anmerk. 2.) die isometrische Projektion eines jeden einzelnen Scheitels an, verbinde die erhaltenen isometrischen Projektionen der einzelnen Scheitel des Polyeders in gehöriger Ordnung durch Gerade, so erhält man die isometrische Projektion des Polyeders. —

Anmerk. 5. Stehen drei Kanten eines Polyeders senkrecht auf einander, so nehme man dieselben als isometrische Axen an. —

§. 200.

Wir wollen nun nach den in den Anmerkungen des letzten Paragraphs gegebenen Regeln noch einige Beispiele machen. —

Beispiel 1. (Fig. 134.) Es sei ABCDEF ein regelmässiges Sechseck, das in der horizontalen Tafel liegt, und die Grundfläche eines senkrechten Prisma sein soll, A′D′K′G′ sei die vertikale Projektion dieses Prisma, man soll die isometrische Projektion desselben bestimmen.

Soll um den Punkt B die Drehung erfolgen, so ziehe man durch B die Gerade X′X″ senkrecht auf AF, und BY senkrecht auf X′X″, verlängere die Geraden FA und DC bis a und b, ziehe ferner AC und DF, so werden diese Geraden senkrecht auf Y stehen, und es werden also diese Hülfslinien die Abstände der einzelnen Scheitel des Sechseckes von den Geraden X und Y angeben. Nun ziehe man $X_1 X'_1$ beliebig, und nehme in dieser Geraden beliebig den Punkt B_1 an, der die isometrische Projektion des Drehungspunktes B sein soll. Ferner lege man in B_1 an X_1 einen Winkel von 120° an, so erhält man Y_1, und es sind die Geraden X_1 und Y_1 zwei isometrische Axen, die in der Ebene ABCDEF liegen. Macht man nun $B_1 a_1 = Ba$, $B_1 c_1 = Bc$, zieht $a_1 A_1 \neq Y_1$ und $c_1 A_1 \neq X_1$, so erhält man in A_1, dem Durchschnitte dieser beiden Parallelen die isometrische Projektion des Punktes A. Nun mache man $B_1 b_1 = Bb$, ziehe $b_1 C_1 \neq B_1 c_1$, dann verlängere man $A_1 c_1$, so wird im Durchschnitte von $b_1 C_1$ mit $A_1 C_1$, nämlich in C_1 die isometrische Projektion des Punktes C erhalten. Verlängert man nun $a_1 A_1$, und macht $a_1 F_1 = aF$, so wird in F_1 die isometrische Projektion von F sein; verlängert man ferner $b_1 C_1$, und macht $b_1 D_1 = bD$, so wird in D_1 die isometrische Projektion des Punktes D_1 erhalten. Nun liegt E in Y, folglich wird auch die isometrische

Projektion von E in Y_1 liegen müssen; macht man daher $B_1E_1 = BE$, so wird E_1 die isometrische Projektion von E sein. Zieht man nun die Geraden B_1A_1, B_1C_1, D_1E_1 und E_1F_1, so wird die isometrische Projektion $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ des regelmässigen Sechseckes ABCDEF erhalten. Nun ziehe man BZ so, dass $< Z_1B_1X_1 = < Z_1B_1Y_1 = 120°$ wird, so wird B_1Z_1 die dritte isometrische Hauptaxes ein. Mit B_1Z_1 von den Punkten A_1, C_1, D_1, E_1 und F_1 Parallele gezogen, und jede derselben gleich D'K' gemacht, ferner die Endpunkte dieser isometrischen Linien durch Gerade verbunden, so wird $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1K_1$ die isometrische Projektion des gegebenen sechsseitigen Prisma sein. —

Anmerk. Aus den in diesem §. gemachten Construktionen ersieht man sogleich, dass wenn eine Seite einer ebenen Figur parallel mit einer der Axen ist, oder sich in einer derselben befindet, dasselbe auch für ihre isometrische Projektion statt findet. —

Beispiel 2. (Fig. 135.) Es sei ABCDE ein in der horizontalen Tafel liegendes Fünfeck, welches die horizontale Spur einer senkrechten Pyramide sein soll, der Punkt S dieses Fünfeckes sei die horizontale Projektion des Scheitels dieser Pyramide, und 'S sei die vertikale Projektion dieses Scheitels, so projicire man (§. 177.) das Fünfeck ABCDE vertikal, und es wird seine vertikale Projektion in der Axe X sein müssen, also (§. 70.) 'A'D sein. Zieht man nun die Geraden 'S D', 'S C', S' A', so erhält man die vertikale Projektion 'A D' S' und die Geraden SA, SB, SC, SC und SE gezogen, so wird S'ABCDE die horizontale Projektion der Pyramide sein. Diese Pyramide sei nun durch die Ebene HNV, welche senkrecht auf der vertikalen Tafel steht, abgeschnitten, so wird a'c'd' die vertikale Projektion der Durchschnittsfigur sein, deren horizontale Projektion (nach §. 183.) erhalten werden kann, und in abcde ist. Nun soll man die isometrische Projektion dieser Pyramide sowohl, als auch die des abgeschnittenen Theiles derselben konstruiren.

Ist A der Drehungspunkt, so nehme man die Gerade AC als Abscissenaxe und AB als Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, lasse durch A senkrecht auf die Ebene BAE die dritte Axe gehen, und konstruire nun vor Allem die isometrische Projektion der Figur ABCDE, die in der Ebene BAE selbst liegt. Zu diesem Zwecke nehme man den Punkt A_1 beliebig an, ziehe $< X_1A_1Y_1 = 120°$, und betrachte A_1X_1, A_1Y_1 als das isometrische Coordinatensystem, ziehe nun pn durch C parallel zu AE, und verlängere AB und ED, bis n und p. Ferner ziehe man df, ck etc. etc. senkrecht auf AXD und dc, bq, ac etc. etc. senkrecht auf AY. Macht man nun $A_1E = AE$ und $A_1B_1 = AB$, so wird in B_1 die isometrische Projektion von B und in E_1 die isometrische Projektion E sein. Nun trage man Ak von A_1 aus auf A_1X_1, ziehe k_1C_1 parallel mit A_1Y_1, und mache $k_1C_1 = kC$, so wird in C_1 die isometrische Projektion des Punktes C sein. Zieht man nun E_1X_1 parallel mit A_1Y_1, und macht $E_1D_1 = ED$, so ist in D_1 die isometrische Projektion des Punktes D. Nun ziehe man die Geraden C_1B_1, C_1D_1, so wird $A_1B_1C_1D_1E_1$ die isometrische Projektions des Fünfeckes ABCDE sein. Macht man nun $k_1S_1 = kS$, so ist in S_1 die isometrische Projektion der horizontalen Projektion des Scheitels der Pyramide, zieht man daher die Geraden S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1, S_1D_1 und S_1E_1, so wird $A_1B_1C_1D_1E_1S_1$ die isometrischen Projektionen der horizontalen Projektion der Pyramide sein. Nun weis man, dass in den Geraden S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1, S_1D_1 und S_1E_1 die isometrische Projektion der Punkte a, b, c, d, e liegen müssen; macht man daher $A_1G_1 = AG$, zieht g_1a_1 parallel A_1Y_1, so wird im Durchschnitte dieser Parallelen mit S_1A_1 die isometrische Projektion des Punktes a liegen müssen, und daher in a_1 sein. Auf gleiche Weise wird man verfahren, um die isometrischen Projektionen b_1, c_1, d_1, e_1 der Punkte b, c, d, e zu erhalten, und zieht man daher die Geraden a_1b_1, b_1c_1, c_1d_1, d_1e_1 und e_1a_1, so wird $a_1b_1c_1d_1e_1$ die isometrische Projektion der horizontalen Projektion abcde der Durchschnittsfigur sein, nach welcher die Ebene HSV die Pyramide (S'A'D', SABCDE) schneidet. Zieht man nun A_1Z_1 so, dass $< Z_1A_1X_1 = Z_1A_1Y_1 = 120°$ wird, legt durch S_1 die Geraden $S_1S'_1$ parallel A_1Z_1 und macht $S_1S'_1 = 'CS'$ (gleich der Höhe der Pyramide), so erhält man in S'_1 die isometrische Projektion des Scheitels, und die Geraden S'_1A_1, S'_1B_1, S'_1C_1, S'_1D_1 und S'_1E_1 gezogen, so wird $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ die isometrische Projektion der Pyramide sein. Zieht man nun durch die Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 und e_1 die Geraden $a_1a'_1$, $b_1b'_1$ etc. etc. parallel mit A_1Z_1, so wird im Durchschnitte der Geraden $a_1a'_1$ mit S'_1A_1, nämlich in a'_1 die isometrische Projektion eines Scheitels jener Durchschnittsfigur, ebenso wird in b'_1 dem Durchschnitte von $b_1b'_1$ mit S'_1B_1 die isometrische Projektion eines zweiten Scheitels derselben sein, und auf gleiche Weise erhält man in c'_1, d'_1 und e'_1 die isometrische Projektion der übrigen Scheitel der Durchschnittsfigur. Zieht man daher die Geraden $a'_1b'_1$, $b'_1c'_1$, $c'_1d'_1$, $d'_1e'_1$ und $e'_1a'_1$, so wird $a'_1b'_1c'_1d'_1e'_1$ die isometrische Projektion der Figur sein, nach welcher die angegebene Pyramide

von der Ebene HSV geschnitten wird, und mithin ist $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 e'_1 a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ die isometrische Projektion der schief abgeschnittenen Pyramide. —

§. 110.

Aufgabe 56. Es ist die isometrische Projektion einer Geraden bekannt, so wie das isometrische Coordinatensystem, für welches jene isometrische Projektion bestimmt wurde; man soll die wahre Länge dieser Geraden angeben.

Auflösung. Diese Gerade, deren Länge bestimmt werden soll, kann entweder in der Coordinatenebene (XY) oder im Raume liegen, und wir wollen daher beide Fälle behandeln.

1. (Fig. 136.) Es sei in der Ebene $X_1 A_1 Y_1$ die isometrische Projektion ab einer Geraden angegeben, man soll deren wahre Länge angeben. Es ist aus den vorhergehenden Construktionen bekannt, dass wenn eine Gerade parallel zu einer der Coordinatenaxen ist, die isometrische Projektion derselben parallel mit der entsprechenden isometrischen Axe und gleich der vorigen Länge ist, wenn also parallel mit einer der isometrischen Axen die isometrische Projektion einer Geraden sein wird, so wird diese letztere schon gleich der wahren Länge der Geraden sein. Zieht man daher ag und bf parallel mit $A_1 Y_1$, sodann ak und bl parallel zu $A_1 X_1$, so werden die ersteren zwei Geraden gleich den rechtwinkligen Abständen der Endpunkte der Geraden von der Abscissenaxe und die letzteren werden die rechtwinkligen Abstände derselben Punkte von der Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems sein. Macht man daher $m_1 l_1 = g_1 f_1 = a_1 f_1 - a_1 g_1 = bf - ag$, ferner $k_1 l_1 = k_1 f_1 - l_1 f_1 = ak - bl$, und macht ferner $< m_1 l_1 k_1 = < g_1 f_1 k_1 = 90°$, zieht sodann $m_1 k_1$, so wird $m_1 k_1$ die Länge der Geraden sein, deren isometrische Projektion ab ist.

2. (Fig. 136.) Die isometrische Projektion $a'b'$, einer im Raume angegebenen Geraden ist bekannt, von welcher ab die isometrische Projektion ihrer horizontalen Projektion ist; man soll die wahre Länge dieser Geraden bestimmen. Vor Allem bestimme man (nach 1. dieses §.) die wahre Länge $m_1 k_1$ der Geraden, deren isometrische Projektion ab ist, so weis man (aus §§. 88. und 89.), dass die Länge der gesuchten Geraden die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen eine Kathete $m_1 k_1$ und dessen andere Kathete die Differenz der vertikalen Ordinaten der Endpunkte a' und b' ist. Nun ist aber (nach Anmerk. 2. §. 199.) $a'a$ die vertikale Ordinate des Punktes a', a und $b'b$ die des Punktes b', b; zieht man daher $k_1 p_1$ senkrecht auf $m_1 k_1$, macht sodann $k_1 p_1 = a'a - b'b$, und zieht $m_1 n_1$, so ist diese letztere die Länge der durch ihre isometrische Projektion $a'b'$ angegebenen Geraden.

von der Ebene HSV geschnitten wird, und mithin ist $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 e'_1 a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ die isometrische Projektion der schief abgeschnittenen Pyramide. —

§. 110.

Aufgabe 56. Es ist die isometrische Projektion einer Geraden bekannt, so wie das isometrische Coordinatensystem, für welches jene isometrische Projektion bestimmt wurde; man soll die wahre Länge dieser Geraden angeben.

Auflösung. Diese Gerade, deren Länge bestimmt werden soll, kann entweder in der Coordinatenebene (XY) oder im Raume liegen, und wir wollen daher beide Fälle behandeln.

1. (Fig. 136.) Es sei in der Ebene $X_1 A_1 Y_1$ die isometrische Projektion ab einer Geraden angegeben, man soll deren wahre Länge angeben. Es ist aus den vorhergehenden Construktionen bekannt, dass wenn eine Gerade parallel zu einer der Coordinatenaxen ist, die isometrische Projektion derselben parallel mit der entsprechenden isometrischen Axe und gleich der vorigen Länge ist, wenn also parallel mit einer der isometrischen Axen die isometrische Projektion einer Geraden sein wird, so wird diese letztere schon gleich der wahren Länge der Geraden sein. Zieht man daher ag und bf parallel mit $A_1 Y_1$, sodann ak und bl parallel zu $A_1 X_1$, so werden die ersteren zwei Geraden gleich den rechtwinkligen Abständen der Endpunkte der Geraden von der Abscissenaxe und die letzteren werden die rechtwinkligen Abstände derselben Punkte von der Ordinatenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems sein. Macht man daher $m_1 l_1 = g_1 f_1 = a_1 f_1 - a_1 g_1 = bf - ag$, ferner $k_1 l_1 = k_1 f_1 - l_1 f_1 = ak - bl$, und macht ferner $\sphericalangle m_1 l_1 k_1 = \sphericalangle g_1 f_1 k_1 = 90°$, zieht sodann $m_1 k_1$, so wird $m_1 k_1$ die Länge der Geraden sein, deren isometrische Projektion ab ist.

2. (Fig. 136.) Die isometrische Projektion a'b', einer im Raume angegebenen Geraden ist bekannt, von welcher ab die isometrische Projektion ihrer horizontalen Projektion ist; man soll die wahre Länge dieser Geraden bestimmen. Vor Allem bestimme man (nach 1. dieses §.) die wahre Länge $m_1 k_1$ der Geraden, deren isometrische Projektion ab ist, so weis man (aus §§. 88. und 89.), dass die Länge der gesuchten Geraden die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen eine Kathete $m_1 k_1$ und dessen andere Kathete die Differenz der vertikalen Ordinaten der Endpunkte a' und b' ist. Nun ist aber (nach Anmerk. 2. §. 199.) a'a die vertikale Ordinate des Punktes a', a und b'b die des Punktes b', b; zieht man daher $k_1 p_1$ senkrecht auf $m_1 k_1$, macht sodann $k_1 p_1 = a'a - b'b$, und zieht $m_1 n_1$, so ist diese letztere die Länge der durch ihre isometrische Projektion a'b' angegebenen Geraden.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kuhn, C.

Descriptive Geometrie mit Einschluss der Principien der Isometrischen Projectionslehre für Schulen und zum Selbstunterrichte

Bd.: 1

Augsburg [1845]
4 Math.p. 181 m-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053585-3